HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DO CALOR PARA MEIOS UNIDIMENSIONAIS PERIÓDICOS CONTINUAMENTE HETEROGÊNEOS

MARCOS PINHEIRO DE LIMA[1], LUANA LAZZARI[2], LUCAS DOS SANTOS FERNANDEZ[3], LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ[4], JULIÁN BRAVO CASTILLERO[5]

RESUMO

O método de homogeneização assintótica consiste na transformação do problema com coeficientes rapidamente oscilantes de um meio heterogêneo (chamado problema original), em outro sobre um meio homogêneo, assintoticamente equivalente ao heterogêneo (chamado problema homogeneizado), mediante uma sequência recorrente de problemas que se inicia com o problema homogeneizado e cujas soluções são os coeficientes de uma série assintótica que aproxima a solução do problema original. Este método tem se mostrado uma importante ferramenta na modelagem e simulação de fenômenos físicos em meios heterogêneos. O presente trabalho descreve o processo formal da homogeneização na equação do calor, em meios continuamente heterogêneos e periódicos. Além disso, estabelece-se uma relação de proximidade entre a solução do problema original e a do problema homogeneizado, a qual é ilustrada mediante um exemplo implementado computacionalmente.

PALAVRAS-CHAVES: EQUAÇÃO DO CALOR. PERIDIOCIDADE. HETEROGENEIDADE. MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA.

ASYMPTOTIC HOMOGENIZATION OF THE HEAT EQUATION FOR CONTINUOUSLY HETEROGENEOUS PERIODIC ONE-DIMENSIONAL MEDIA

ABSTRACT

The asymptotic homogenization method consists of transforming the problem with rapidly oscillating coefficients of a heterogeneous medium (the original problem), into another one of a homogeneous medium, asymptotically equivalent to the heterogeneous one (the homogenized problem) by means of a recurrent sequence of problems starting with the homogenized problem and whose solutions are the coefficients of an asymptotic series which approximates the solution of the original problem. This method has been shown to be an important tool for modelization and simulation of physical phenomena in heterogeneous media. This paper

---

[1] Mestrando em Modelagem Matemática. Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática – UFPel; email: marcos.p.lima@hotmail.com

[2] Mestranda em Modelagem Matemática. Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática – UFPel; email: luana-lazzari@hotmail.com

[3] Mestrando em Modelagem Matemática. Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática – UFPel; email: lucassfernandez@gmail.com

[4] Doutor em Matemática. Departamento de Matemática e Estatística/Instituto de Física e Matemática – UFPel; email: leslie.fernandez@ufpel.edu.br

[5] Doutor em Matemática. Departamento de Matemática/Faculdade de Matemática e Computação-Universidade de Havana - Universidade de Havana; email: jbravo@matcom.uh.cu

describes the formal homogenization process of the heat equation on periodic and continuously heterogeneous media. Also, a proximity relation between the solution of the original problem and that of the homogenized problem is proven, a fact which is illustrated by means of a computationally implemented example.

KEYWORDS: HEAT EQUATION. PERIODICITY. HETEROGENEITY. ASYMPTOTIC HOMOGENIZATION METHOD.

1. INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo estruturas heterogêneas nem sempre são fáceis de modelar devido à não linearidade e periodicidade que o meio pode apresentar. Além disso, o meio macroscopicamente homogêneo sofre grande influência da heterogeneidade microscópica, dificultando ainda mais a resolução de problemas neste tipo de meio. No entanto, neste casos, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) pode facilitar na formulação dos modelos que descrevem o comportamento físico e geométrico do meio, permitindo a análise da estrutura como um todo.

O MHA consiste na transformação do problema de um meio heterogêneo, com coeficientes rapidamente oscilantes (chamado problema original), em outro sobre um meio homogêneo, equivalente ao heterogêneo (chamado problema homogeneizado) que geralmente não depende da variável rápida [1]. Esta técnica de modelagem tem-se mostrado uma importante ferramenta na simulação de fenômenos físicos em meios heterogêneos como, por exemplo, para descrever a degradação de materiais porosos [4], no estudo de ondas sísmicas [2], para determinar propriedades eletromecânicas efetivas de estruturas ósseas [5], e na análise de propriedades termo-elásticas de materiais compósitos [3].

Tendo em vista a importância da condução de calor em diversas áreas, o presente trabalho descreve o processo formal da homogeneização da equação do calor, em meios continuamente heterogêneos e periódicos, e ainda, estabelece uma relação de proximidade entre a solução do problema original e a solução do problema homogeneizado. A equação do calor que modela a condução de calor em um meio caracterizado pelo parâmetro geométrico ε, sendo $0 < \varepsilon = 1$, que indica a existência de duas escalas no meio, dada por:

$$L^{\varepsilon}u_{\varepsilon} - f = 0, \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{1}$$

sendo o operador linear definido por

$$L^{\varepsilon} u_{\varepsilon} = c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial(u_{\varepsilon})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial(u_{\varepsilon})}{\partial x}\right]$$

onde c é a capacidade térmica, x é a posição, t é o tempo, u_{ε} é a temperatura, k é a condutividade térmica e f é a fonte de calor. Têm-se associadas à Equação (1) as seguintes condições:

$$u_{\varepsilon}(0,t) = 0, \quad u_{\varepsilon}(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$u_{\varepsilon}(x,0) = \psi(x), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

sendo que as funções c, k, f e ψ são funções diferenciáveis; c e k funções ε-periódicas, positivas e limitadas.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Ao aplicar o MHA no problema (1)-(3) admite-se a solução como uma expansão em série assintótica em potências de ε denominada solução assintótica formal (s.a.f.), da qual se obtêm uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ε. A partir do desenvolvimento destes problemas determina-se a equação do problema homogeneizado e a equação do problema local. Quando ε tende a zero, a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado [1].

Para construir a s.a.f. emprega-se o Lema descrito a seguir, um relevante resultado para o desenvolvimento do MHA.

Lema [1]: Sejam $F(y)$ e $k(y)$ funções diferenciáveis e 1-periódicas com $k(y)$ positiva e limitada. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN = F(y)$ é que:

$$\langle F(y) \rangle = \int_0^1 F(y)dy = 0, \tag{4}$$

onde,

$$L = \frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{d}{dy}\right).$$

Para provar que a relação de proximidade entre $u_{\varepsilon}(x,t)$, solução do problema (1)-(3), e $u_0(x,t)$, solução do problema homogeneizado, é de ordem $\sqrt{\varepsilon}$, será utilizada uma versão do Princípio do Máximo Generalizado [1].

De modo a ilustrar os resultados analíticos, será implementado um caso numérico da equação do calor para obter e comparar as soluções do problema homogeneizado e do problema original para diferentes valores de ε.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Homogeneização e proximidade entre soluções

Para determinar a s.a.f. do problema (1)-(3), considera-se a aproximação assintótica $u_\varepsilon^{(2)}(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t)$, onde $u_j(x,y,t)$, $j = 0,1,2$ são funções diferenciáveis e 1-periódicas na variável local $y = x/\varepsilon$. A substituição em (1) resulta em

$$c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right] - f(x,t) \approx 0. \quad (5)$$

Para o desenvolvimento dos cálculos consideram-se a regra da cadeia $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}(\cdot)$ e o operador $L_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(k(y)\frac{\partial}{\partial \beta}\right)$, $\alpha, \beta \in \{x, y\}$, a fim de simplificar a notação. Assim, obtém-se uma sequência recorrente de equações a partir dos coeficientes das potências de ε:

$$\varepsilon^{-2} : L_{yy}u_0 = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon^{-1} : L_{yy}u_1 = -L_{yx}u_0 - L_{xy}u_0, \quad (7)$$

$$\varepsilon^{0} : L_{yy}u_2 = c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial t} - L_{xx}u_0 - L_{yx}u_1 - L_{xy}u_1 - f, \quad (8)$$

$$\varepsilon^{1} : c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t} - L_{xx}u_1 - L_{yx}u_2 - L_{xy}u_2 = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon^{2} : c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_2}{\partial t} - L_{xx}u_2 = 0. \quad (10)$$

Analogamente, aplica-se a expansão truncada nas condições (2) e (3). Logo, tem-se:

$$\varepsilon^0 : u_0(0,0,t) = 0, \qquad \varepsilon^0 : u_0(1,1/\varepsilon,t) = 0, \qquad \varepsilon^0 : u_0(x,x/\varepsilon,0) = \psi(x), \tag{11}$$

$$\varepsilon^1 : u_1(0,0,t) = 0, \qquad \varepsilon^1 : u_1(1,1/\varepsilon,t) = 0, \qquad \varepsilon^1 : u_1(x,x/\varepsilon,0) = 0, \tag{12}$$

$$\varepsilon^2 : u_2(0,0,t) = 0, \qquad \varepsilon^2 : u_2(1,1/\varepsilon,t) = 0, \qquad \varepsilon^2 : u_2(x,x/\varepsilon,0) = 0. \tag{13}$$

Para determinar a equação do problema local e do problema homogeneizado solucionam-se as equações para ε^{-2}, ε^{-1} e ε^0.

Primeiramente, para resolver a equação (6), aplica-se o Lema, de modo a garantir a existência e unicidade de u_0 1-periódica, e na sequência, integra-se com respeito a y. Assim:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{p_1(x,t)}{k(y)} \tag{14}$$

Para determinar $p_1(x,t)$ aplica-se a média em ambos os lados da equação (14). Como u_0 é 1-periódica em y, tem-se que a média da derivada é zero, e portanto $\langle p_1(x,t)/k(y)\rangle = 0$. Por definição, tem-se que $k(y) > 0$, logo a integral $\int_0^1 1/k(y)dy > 0$, e assim $p_1(x,t) = 0$. Portanto, obtém-se que $u_0(x,y,t) = u_0(x,t)$.

De modo análogo, para garantir a existência e unicidade de u_1 e u_2, soluções dos problemas (7) e (8), obtém-se

$$u_1(x,y,t) = N_1(y)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} \tag{15}$$

onde $N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(s)} - 1\right) ds$, $\hat{k} = \dfrac{1}{\int_0^1 1/k(y)dy}$ e ainda,

$$u_2(x,y,t) = N_2(y)\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + M(y)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} \tag{16}$$

onde $N_2(y) = \hat{k}\langle N_1(y)\rangle \int_0^y \frac{1}{k(s)}ds - \int_0^y N_1(s)ds$, $M(y) = \int_0^y \left(\frac{1}{k(w)}\right)\left\{\int_0^w [c(s) - \langle c(s)\rangle]ds - K_M\right\}dw$ e $K_M = \hat{k}\int_0^1 \frac{1}{k(w)}\left\{\int_0^w [c(s) - \langle c(s)\rangle]ds\right\}dw$.

A condição de existência e unicidade de u_1 1-periódica solução de (7) é a equação do problema local:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x}\left(\frac{\hat{k}}{k(y)} - 1\right) \tag{17}$$

De modo análogo, a condição de existência e unicidade de u_2 1-periódica, solução de (8), é a equação do problema homogeneizado:

$$\langle c\rangle \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,1), \qquad t > 0, \tag{18}$$

$$u_0(0,t) = 0, \qquad u_0(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{19}$$

$$u_0(x,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{20}$$

onde $\langle c\rangle$ é a capacidade calorífica efetiva e $\hat{k}$ é a condutividade térmica efetiva.

Para provar que a relação de proximidade entre $u_\varepsilon(x,t)$ e $u_0(x,t)$, é de ordem $\sqrt{\varepsilon}$, ou seja, $\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O(\sqrt{\varepsilon})$, considera-se a aproximação assintótica truncada $u_\varepsilon^{(1)} = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t)$ e o operador L^ε, já definido na Equação (1).

Note que substituir a expansão assintótica em (1) equivale a calcular $L^\varepsilon u_\varepsilon - f \approx 0$, onde se determina f considerando $u_2 = 0$ na Equação (8). Logo tem-se que:

$$f = c(y)\frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y)N_1(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right). \tag{21}$$

Então,

$$L^\varepsilon u_\varepsilon^{(1)} - f = c(y)\varepsilon N_1(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon k(y)N_1(y)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \equiv F(x,t,\varepsilon) \tag{22}$$

e aplicando $u_\varepsilon^{(1)}$ nas condições (2) e (3), tem-se que

$$u_\varepsilon^{(1)}(0,t) = 0, \qquad u_\varepsilon^{(1)}(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{23}$$

$$u_\varepsilon^{(1)}(x,0) = \psi(x), \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad x \in (0,1). \tag{24}$$

Subtraindo os problemas (1)-(3) de (22)-(24), obtém-se assim o seguinte problema

$$L^{\varepsilon}\ u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{(1)} = -F(x,t,\varepsilon), \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{25}$$

$$u_{\varepsilon}(0,t) - u_{\varepsilon}^{(1)}(0,t) = 0, \qquad u_{\varepsilon}(1,t) - u_{\varepsilon}^{(1)}(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{26}$$

$$u_{\varepsilon}(x,0) - u_{\varepsilon}^{(1)}(x,0) = 0, \qquad\qquad x \in (0,1). \tag{27}$$

Para garantir a existência e unicidade da solução do problema (25)-(26), aplica-se o Princípio do Máximo Generalizado, citado anteriormente. Logo, obtém-se

$$\left\| u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{(1)} \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \leq K(T) \left\| -F \right\|_{L_2((0,1)\times(0,T))} \tag{28}$$

onde,

$$\left\| -F \right\|^2_{L_2\ (0,1)\times(0,T)} \leq \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left(c(y)N_1(y)\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t \partial x} - k(y)N_1(y)\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^3} \right)^2 dxdt. \tag{29}$$

Para estimar as integrais da Equação (29) tem-se, pelo Teorema de *Weierstrass*, que existem A, $B > 0$ tais que

$$\left\| -F \right\|_{L_2((0,1)\times(0,T))} \leq \sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}, \tag{30}$$

onde $K(T) = \sqrt{T}$, para algum $T \in \mathbb{R}_+^*$. A partir disso conclui-se que

$$\left\| u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{(1)} \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right), \tag{31}$$

e de modo análogo pode-se mostrar que

$$\left\| u_{\varepsilon}^{(1)} - u_0 \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{32}$$

De (34) e (35), segue que:

$$\begin{aligned} \left\| u_{\varepsilon} - u_0 \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} &= \left\| u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{(1)} + u_{\varepsilon}^{(1)} - u_0 \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \\ &= \left\| u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{(1)} \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} + \left\| u_{\varepsilon}^{(1)} - u_0 \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} \\ &= O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \\ &= O\left(\sqrt{\varepsilon}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Portanto,

$$\left\| u_{\varepsilon} - u_0 \right\|_{W_2^{1,0}((0,1)\times(0,T))} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{34}$$

3.2 Um exemplo ilustrativo

Consideramos os problemas, original (1)-(3), homogeneizado (18)-(20) e a solução assintótica formal, com $c(x/\varepsilon)=1$, $f(x,t)=e^{-t}$, $k(x/\varepsilon)=1+0.25\,\mathrm{sen}(2\pi x/\varepsilon)$, e $\psi(x)=0$ para $\varepsilon=1/2, 1/4, 1/8$. Resolvendo o problema (1)-(3) pelo método de Crank-Nicolson (Método de Diferenças Finitas), o problema homogeneizado pelo método de Fourier e a partir da solução do problema homogeneizado constituir a solução assintótica formal de ordem $O(\varepsilon)$, obtém-se os resultados ilustrados na FIGURA 1. Nesta figura pode-se visualizar a distribuição da temperatura sobre o meio heterogêneo especifico durante o intervalo de tempo definido, bem como perceber uma proximidade entre tais superfícies definido tal parâmetro ε.

Na FIGURA 2 é possível visualizar a convergência da solução do problema original (azul) e a solução assintótica (verde) para a solução do problema homogeneizado (vermelho) quando ε se aproxima a zero.

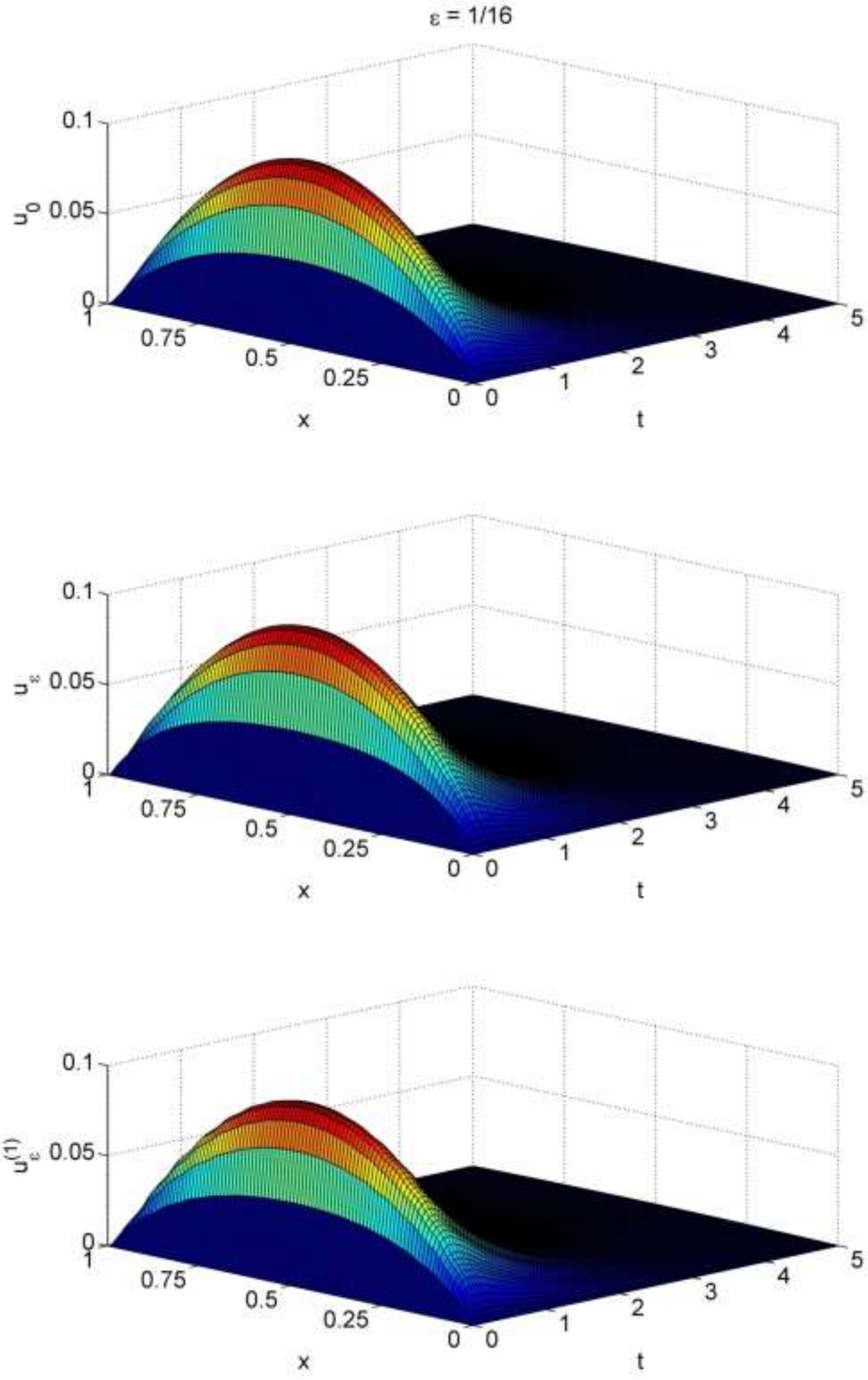

Figura 1: Soluções dos problemas homogêneo e original, assim como, a solução assintótica de ordem $O(\varepsilon)$ respectivamente, sendo $\varepsilon = 1/16$.

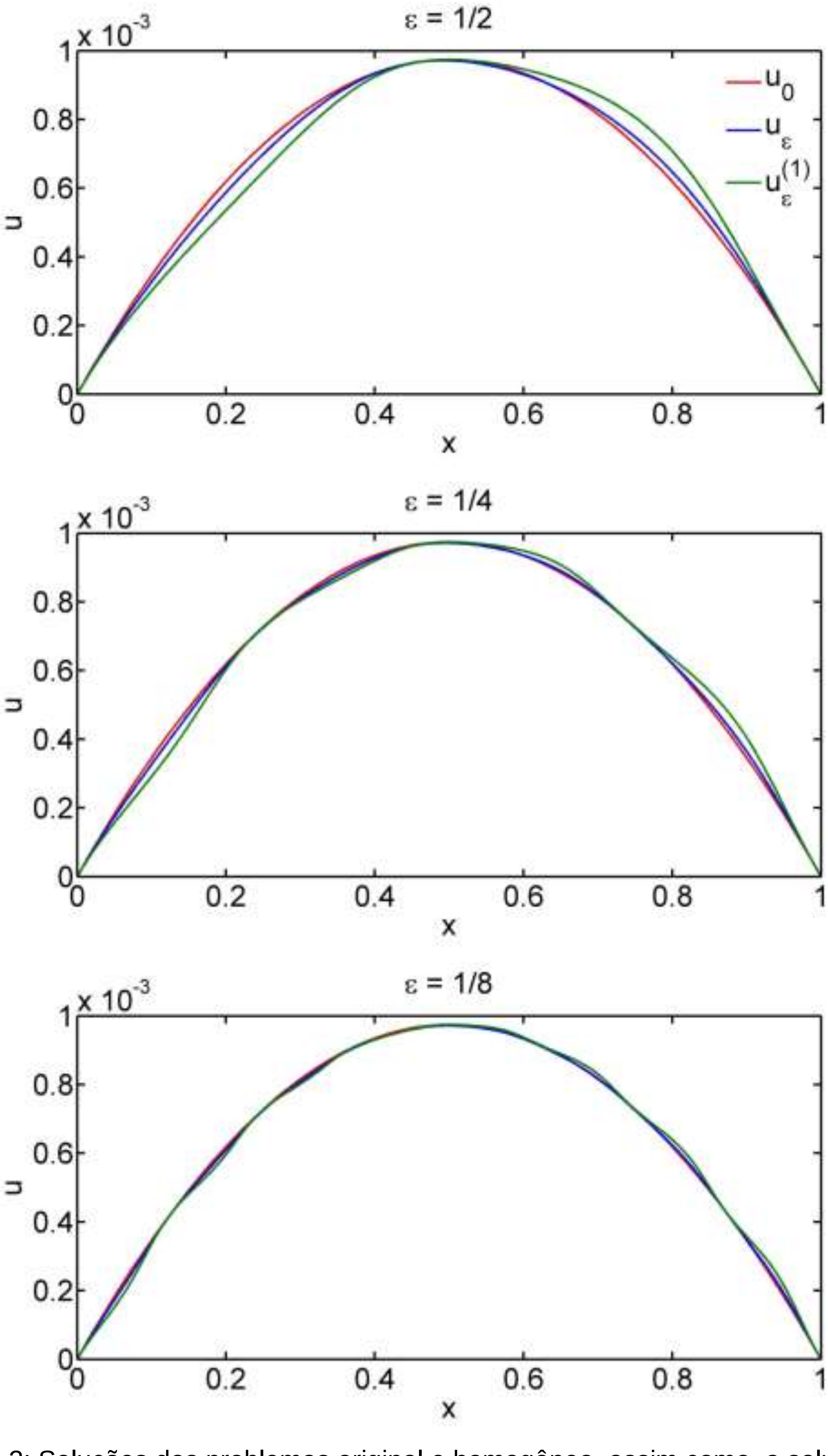

Figura 2: Soluções dos problemas original e homogêneo, assim como, a solução assintótica de ordem $O(\varepsilon)$ para diferentes valores de ε e $t = 5$.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica à equação do calor definida sobre meios continuamente heterogêneos e periódicos, e provou-se que a proximidade entre a solução u_ε do problema original, $u_\varepsilon^{(1)}$ solução assintótica de ordem $O(\varepsilon)$ e a solução u_0 do problema homogeneizado são de ordem $O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. Através da implementação de um exemplo foi ilustrado o fato de que a solução u_ε e $u_\varepsilon^{(1)}$ convergem para a solução u_0 quando ε tende a zero.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media. Mathematics and its applications** (soviet series). Dordrecht, Russia. Kluwer Academic Publishers, 1989. 366p.

[2] CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT L.; MARIGO J. J. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. **Geophysical Journal International**, v. 181, p. 897-910, 2010.

[3] CRUZ, J. P.; FERREIRA, P.S.; OLIVEIRA, J.A.; DIAS F.T. Homogeneização de propriedades de materiais compósitos em termoelasticidade linear. **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica**, v. 13, n. 2, p. 03-23, 2009.

[4] PETER M. A. Homogenisation of a chemical degradation mechanism inducing na evolving microstructure. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 335, p.679-684, 2007.

[5] SILVA, U. P**. Um estudo do método de homogeneização assimptótica visando aplicações em estruturas ósseas**. 125 p. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, 2009.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPERGS/CAPES pelo apoio financeiro para o desenvolvimento das atividades científicas e ao apoio do projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01 intitulado "Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização".