SIMULAÇÃO NUMÉRICA E CONSTRUCTAL DESIGN APLICADOS À FLAMBAGEM ELÁSTICA DE PLACAS FINAS DE AÇO

EMILIO GABRIEL GONÇALVES FOLZKE[1], ANDERSON LUIS GARCIA CORREIA[2], THIAGO DA SILVEIRA[3], LUIZ ALBERTO OLIVEIRA ROCHA[4], ELIZALDO DOMINGUES DOS SANTOS[5], MAURO DE VASCONCELLOS REAL[6], LIÉRCIO ANDRÉ ISOLDI[7,*]

RESUMO

O fenômeno de flambagem ocorre quando elementos estruturais esbeltos são submetidos a cargas de compressão axial. Além disso, em muitas situações é necessário que existam perfurações nestas placas. Neste artigo o método *Constructal Design*, baseado na Teoria Constructal, foi utilizado para avaliar a influência da geometria do furo em placas finas de aço submetidas à flambagem elástica. Para isso, furos do tipo retangular, elíptico e oblongo, centralizados na placa, foram considerados. A geometria desses furos foi variada considerando o grau de liberdade H_0/L_0, que relaciona as dimensões características de cada tipo de perfuração. Além disso, todos os furos analisados possuem a mesma fração de volume (ϕ), que representa a relação entre o volume da perfuração e o volume da placa sem furo. A função objetivo é maximizar a carga crítica das placas perfuradas. Para tanto, *o software ANSYS,* baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), foi empregado para determinar numericamente a carga crítica de flambagem em cada caso. Foi observada a importância da configuração geométrica nas busca por performances superiores: através de uma simples variação na geometria do furo, mantendo fixa sua fração volumétrica, foi possível obter cargas críticas até 143,40 % superiores quando comparados às obtidas com as piores geometrias.

PALAVRAS-CHAVES: CARGA CRÍTICA. FLAMBAGEM DE PLACAS PERFURADAS. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF). OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA. TEORIA CONSTRUCTAL.

NUMERICAL SIMULATION AND CONSTRUCTAL DESIGN APPLIED TO ELASTIC BUCKLING OF THIN STEEL PLATES

ABSTRACT

Buckling is an instability phenomenon that happens when a slender plate is subjected to axial compression loads. Nevertheless, perforated plates are often necessary in the engineering field. Throughout this article, the Constructal

[1] Escola de Engenharia – FURG. Graduando de Engenharia Civil. Email: emiliofolzke@gmail.com
[2]Escola de Engenharia – FURG. Mestre em Engenharia Oceânica. Email: anderson_luis_88@hotmail.com
[3]Escola de Engenharia – FURG. Engenheiro Mecânico. Email: engmects@hotmail.com
[4]Escola de Engenharia – FURG. Doutor em Engenharia Mecânica. Email: luizrocha@mecanica.ufrgs.br
[5]Escola de Engenharia – FURG. Doutor em Engenharia Mecânica. Email: elizaldosantos@furg.br
[6]Escola de Engenharia – FURG. Doutor em Engenharia Civil. Email: mauroreal@furg.br
[7]Escola de Engenharia – FURG. Doutor em Engenharia Mecânica. Email:liercioisoldi@furg.br

Design Method, which is based on the Constructal Theory, has been used to evaluate the influence of the hole on thin steel plates under elastic buckling. For that, the different types of holes analyzed were rectangular, elliptical and oblong. They were all placed in the center of the plate. The hole's geometry varied according to the degree of freedom H_0/L_0, which relates the dimensions of each type of different hole. Besides, all the analyzed holes have the same volume fraction (ϕ), that represents the relation between the hole's volume and the plate without hole. The main goal is to achieve the greatest critical load for the perforated plates. To do so, the ANSYS software, based on the Finite Element Method (FEM), has been used to numerically analyze the buckling critical load in each case. It has been observed the importance of the geometry when seeking superior performances: through a simple fluctuation of the hole's geometry, once the volume fraction was kept constant, it was possible to achieve critical loads even 143.40% superior when compared to the ones with the worst critical loads.

KEYWORDS: BUCKLING. CONSTRUCTAL THEORY. CRITICAL LOAD. FINITE ELEMENT METHOD (FEM). GEOMETRICAL OPTIMIZATION. PERFORATED PLATES.

1. INTRODUÇÃO

As placas finas são elementos estruturais amplamente utilizados na engenharia naval e oceânica, como por exemplo, em plataformas de extração de petróleo e em embarcações. Sabe-se, porém, que elementos estruturais esbeltos submetidos a cargas de compressão axial podem falhar de maneira súbita devido a um fenômeno de instabilidade conhecido como flambagem [11]. Portanto, placas finas submetidas a uma compressão uniaxial, podem flambar. Na flambagem, no momento em que a carga crítica é atingida, ocorre uma súbita flexão da placa na direção transversal ao plano de aplicação da carga [1]. Normalmente, a carga crítica que provoca a flambagem tem intensidade bastante inferior à carga que atingiria a tensão de escoamento do material.

Além disso, em muitas situações é necessária a existência de furos nessas placas, seja para a redução do peso próprio, seja para fins de acesso, serviços e até mesmo estética. Entretanto, a presença desses furos gera uma redistribuição de tensões acompanhada por uma mudança no comportamento mecânico das placas [5].

É possível estudar analiticamente a flambagem em placas sem perfurações, porém não existem soluções analíticas para a flambagem de placas perfuradas, o que justifica o uso da simulação numérica para a análise do problema.

Cabe destacar que nas placas o fenômeno da flambagem pode ser dividido em duas categorias: a flambagem elástica e a flambagem elasto-plástica. Nas placas, a flambagem elástica (linear) não é considerada como o colapso da estrutura, como acontece em colunas. As placas apresentam um comportamento pós-flambagem (não-linear), podendo resistir a um carregamento superior ao da carga crítica (flambagem elástica), sofrendo colapso somente quando a carga última (flambagem elasto-plástica) for atingida [1].

Como o foco do presente trabalho é a flambagem elástica de placas perfuradas, a seguir serão destacadas algumas publicações envolvendo esse assunto: El-Sawy e Nazmy [6] investigaram o efeito da geometria nas cargas críticas de flambagem em placas retangulares com furos excêntricos de formato circular e retangular, submetidas a carregamento uniaxial; El-Sawy e Martini [7] utilizaram o método dos elementos finitos para determinar as cargas de flambagem em placas retangulares carregadas biaxialmente com furos circulares centrados; Moen e Schafer [12] desenvolveram expressões analíticas validadas e resumidas para estimar a influência de furos únicos ou múltiplos na carga crítica de flambagem de placas em flexão ou compressão.

Portanto, empregando uma abordagem computacional aliada ao método *Constructal Design*, o objetivo desse trabalho foi avaliar a influência da geometria de diferentes tipos de furos em placas finas sob flambagem elástica, visando maximizar a carga crítica. Para isso, um modelo computacional desenvolvido no software *ANSYS*, que é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), foi usado para simular numericamente os casos definidos através do método *Constructal Design*. Quatro tipos de furos foram considerados: retangular, elíptico, oblongo transversal e oblongo longitudinal. Esses furos são centralizados nas placas e possuem a mesma fração de volume $\phi = 0.15$, que é definida pela relação entre o volume do furo e o volume de placa. Já a geometria de cada furo varia de acordo com o grau de liberdade H_0/L_0, que é a relação entre a altura e o comprimento da perfuração. Todas as placas simuladas são consideradas simplesmente apoiadas em seus quatro lados e possuem uma relação entre altura (H = 1 m) e comprimento (L = 2 m) de H/L = 0.5.

Até o momento, a maioria dos estudos empregando a Teoria Constructal é dedicada ao desenvolvimento de geometrias ótimas em problemas de mecânica dos fluidos e de transferência de calor. No entanto, é possível considerar os elementos estruturais como sistemas que podem assumir configurações que facilitem o fluxo de tensões. Esse ponto de vista é bastante incomum, mas tem se mostrado eficaz na busca

por geometrias otimizadas que conduzam a comportamentos mecânicos superiores [9]. Cabe informar ainda que estudos envolvendo o método *Constructal Design* e a flambagem elástica de placas perfuradas é uma exclusividade do grupo de pesquisa em Mecânica dos Sólidos Computacional da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (FURG), entre os quais destacam-se as referências [8,15,16].

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Inicialmente uma placa sem perfurações foi estudada analiticamente e numericamente. Os resultados obtidos foram comparados para realizar a verificação do modelo numérico. Depois, o valor da carga crítica de flambagem dessa placa foi adotado como parâmetro comparativo para as placas perfuradas.

2.1 Flambagem Elástica de Placas

Como já foi dito, em inúmeras situações de projeto, placas finas são submetidas a cargas de compressão uniaxial. A grande esbeltez desses componentes faz com que elas sejam suscetíveis a instabilidades como a flambagem [14]. No presente trabalho será considerada uma placa fina retangular de aço (módulo de elasticidade E = 210 GPa e coeficiente de *Poisson* ν = 0.3), com comprimento L = 2 m, altura H = 1m, espessura t = 10 mm, simplesmente apoiada em seus quatro lados e submetida a uma carga compressiva P, como mostra a FIGURA. 1.

A solução analítica para a determinação da carga crítica de uma placa sem furos é dada por:

$$P_{cr} = k\frac{\pi^2 E t^3}{12H^2\left(1-\nu^2\right)} \tag{1}$$

onde π é uma constante matemática e k é o coeficiente de flambagem, dado por:

$$k = \left(m\frac{H}{L} + \frac{1}{m}\frac{L}{H}\right)^2 \tag{2}$$

sendo *m* o número de meias ondas que ocorrem na direção longitudinal à flambagem, definindo o modo de flambagem da placa.

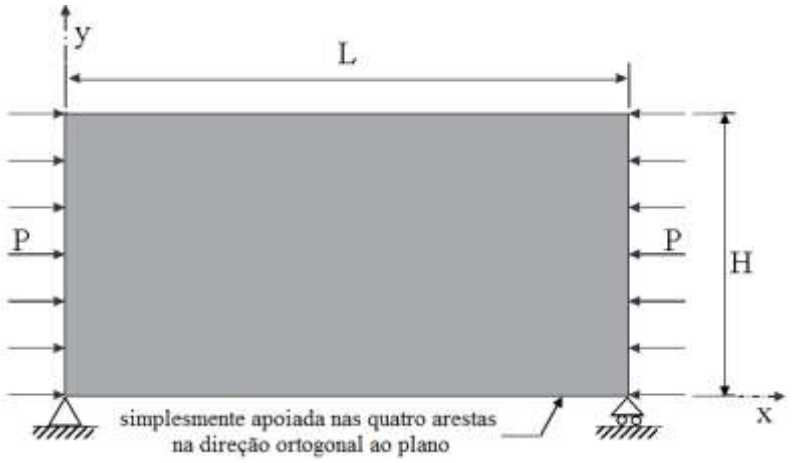

Figura 1: Placa sólida retangular submetida à compressão uniaxial.

Então, aplicando a Equação 2 e considerando que na configuração flambada são geradas duas meias ondas na direção longitudinal da placa, obtém-se o coeficiente da flambagem k = 4.0. Com isso, através da Equação 1, é possível determinar que o valor analítico para a carga crítica de flambagem apresentada na FIGURA 1 é P_{cr} = 759.20 kN/m.

2.2 Modelagem Computacional

O modelo numérico foi desenvolvido através do software de elementos finitos *ANSYS*. Em todas as simulações, foi utilizado o elemento *SHELL*93, que possui oito nós e integração reduzida. O elemento possui seis graus de liberdade em cada nó: três translações (u, v, w) e três rotações (θ_x, θ_y, θ_z) [2].

Para o estudo numérico do fenômeno da flambagem foi adotada a análise elástica de autovalores. As equações de equilíbrio por elementos finitos para este tipo de análise envolvem a solução de equações algébricas homogêneas cujo autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o modo primário de flambagem [12].

A formulação utilizada na análise inclui tanto os termos lineares como os não-lineares. Assim, a matriz de rigidez total [*K*], é obtida pela soma da matriz de rigidez

convencional para pequenas deformações, [K_E], com outra matriz, [K_G], chamada matriz de rigidez geométrica. A matriz [K_G] depende não só da geometria, mas também do esforço interno existente no início do carregamento, {P_0}. Então, a matriz de rigidez total da placa para um nível de carga {P_0} pode ser escrita como [13]:

$$\left[K\right]=\left[K_E\right]+\left[K_G\right] \tag{3}$$

Quando a carga atinge o nível de {P} = λ{P_0}, onde λ é um escalar, a matriz de rigidez pode ser definida como:

$$\left[K\right]=\left[K_E\right]+\lambda\left[K_G\right] \tag{4}$$

As equações de equilíbrio governantes para a placa podem ser escritas como:

$$\left[\left[K_E\right]+\lambda\left[K_G\right]\right]\left\{U\right\}=\lambda\left\{P_0\right\} \tag{5}$$

onde {U} é o vetor de deslocamento total, que pode, portanto ser determinado por:

$$\left\{U\right\}=\left[\left[K_E\right]+\lambda\left[K_G\right]\right]^{-1}\lambda\left\{P_0\right\} \tag{6}$$

Na flambagem, a placa apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento da carga. Por definição matemática é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes. Então os deslocamentos {U} tendem a infinito quando:

$$\det\ \left[\left[K_E\right]+\lambda\left[K_G\right]\right]=0 \tag{7}$$

A Equação 7 representa um problema de autovalor que, quando resolvido, gera o menor autovalor, λ_1, que corresponde à carga crítica {P_{cr}} = λ_1{P_0} em que ocorre a flambagem elástica. Além disso, o vetor de deslocamento associado {U} define a forma do modo de flambagem. O problema de autovalor é resolvido usando o método numérico de Lanczos [2].

Então, para a verificação do modelo computacional, a carga crítica de uma placa não perfurada (FIGURA 1) foi numericamente determinada e o resultado foi comparado com a solução analítica dada pela Equação 1. A placa foi discretizada adotando um elemento triangular com lados de tamanho de 50.00 mm (H/20), gerando uma malha com 1814 elementos finitos (FIGURA 2(a)). O resultado numérico para a carga crítica de flambagem foi 755.30 kN/m, mostrando uma diferença de -0.51% em relação à solução analítica anteriormente obtida. A FIGURA 2(b) apresenta o modo de flambagem da placa não perfurada, com a formação de duas meias ondas.

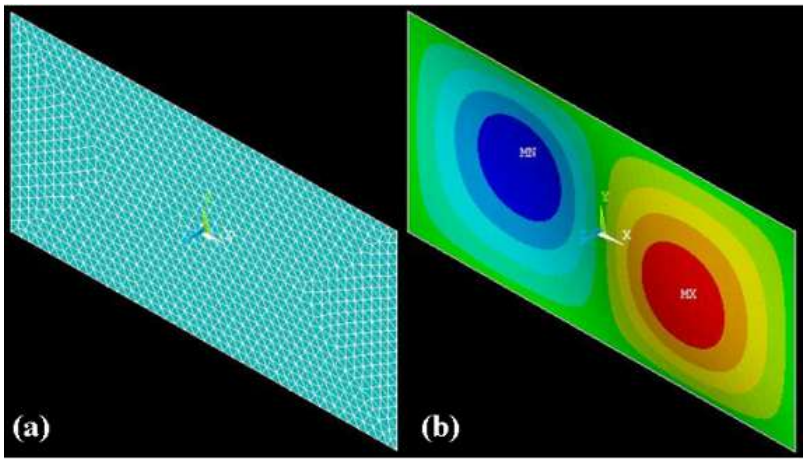

Figura 2: Placa sem furo: (a) Malha de elementos finitos; (b) Forma flambada.

2.3 Método *Constructal Design*

A aplicação da Teoria Constructal [3,4] em problemas de engenharia é feita através do método *Constructal Design*. Esse método é baseado em restrições e objetivos, permitindo avaliar a influência da variação da configuração geométrica do sistema em seu desempenho. Neste trabalho, o *Constructal Design* foi empregado no estudo de placas finas com furo centrado, considerando quatro diferentes tipos de furos: retangular (FIGURA 3(a)), elíptico (FIGURA 3(b)), oblongo transversal (FIGURA 3(c)) e oblongo longitudinal (FIGURA 3(d)). A geometria de cada furo foi variada através do grau de liberdade H_0/L_0. Já o volume do furo foi considerado como uma restrição, sendo mantido constante em todas as simulações realizadas. Para isso o parâmetro ϕ, chamado de fração de volume do furo, que é a relação entre o volume do furo (V_0) e o volume da placa sem perfuração (V), foi fixado em 0.15 para todos os tipos e geometrias de furos analisados. Para o furo retangular a fração de volume é dada por:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0 L_0 t}{HLt} = \frac{H_0 L_0}{HL} \tag{8}$$

para a perfuração elíptica a fração de volume é definida como:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(\pi H_0 L_0 t)/4}{HLt} = \frac{\pi H_0 L_0}{4HL} \tag{9}$$

já para o furo elíptico transversal,

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left[(H_0 - L_0)L_0 + \pi\left(\frac{L_0}{2}\right)^2\right]t}{HLt} = \frac{H_0 L_0 - {L_0}^2 + \frac{\pi}{4}{L_0}^2}{HL} \tag{10}$$

e, por fim, a fração de volume do furo oblongo longitudinal é:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left[(L_0 - H_0)H_0 + \pi\left(\frac{H_0}{2}\right)^2\right]t}{HLt} = \frac{L_0 H_0 - {H_0}^2 + \frac{\pi}{4}{H_0}^2}{HL} \tag{11}$$

Cabe salientar que os furos oblongos são formados a partir de uma região central retangular e por dois semicírculos nas extremidades (ver FIGURAS 3(c) e 3(d)).

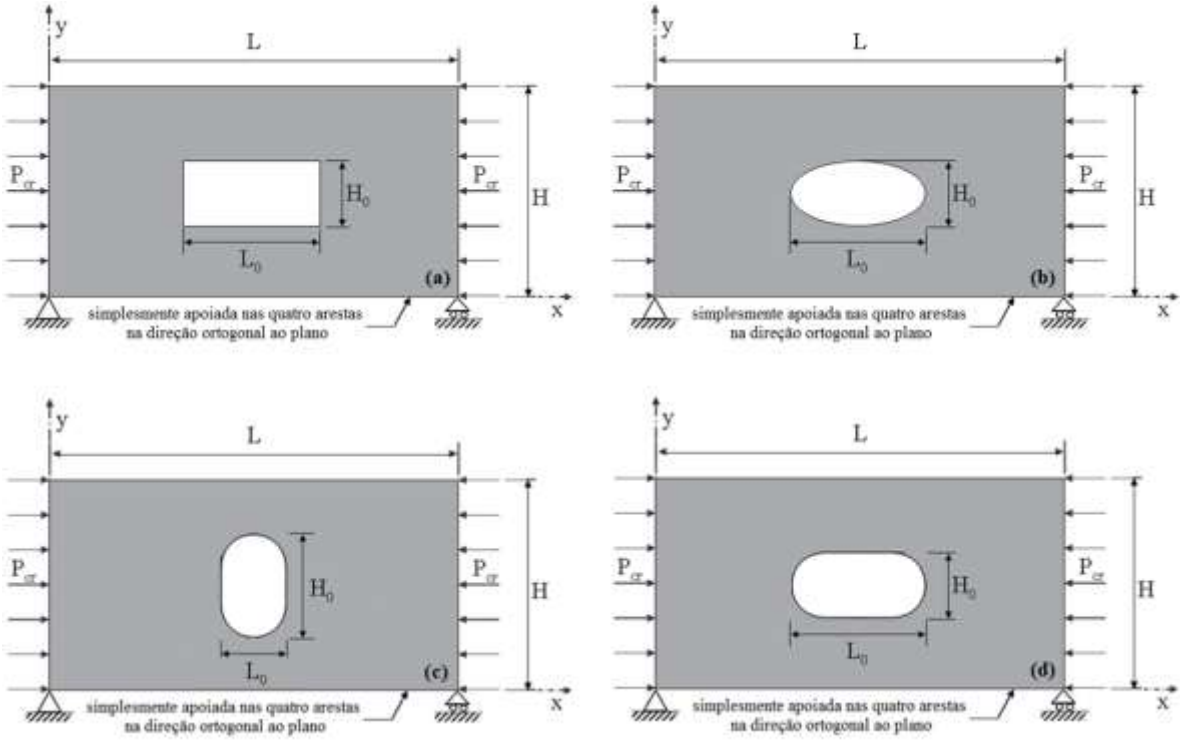

Figura 3: Placas com furos centralizados do tipo: (a) retangular; (b) elíptica; (c) oblongo transversal; e (d) oblongo longitudinal.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em todos os casos simulados numericamente foram empregados o mesmo material e a mesma discretização do domínio computacional usada no procedimento de verificação do modelo computacional.

Para permitir uma comparação entre os resultados obtidos para os diferentes tipos de furos e suas variações geométricas, foi considerada uma carga crítica adimensional ($P_{cr,adim}$) definida pela relação entre a carga crítica da placa perfurada e a carga crítica da placa sem perfuração. Na FIGURA 4 são apresentados os valores de $P_{cr,adim}$ para os quatro tipos de furos analisados em função do grau de liberdade H_0/L_0.

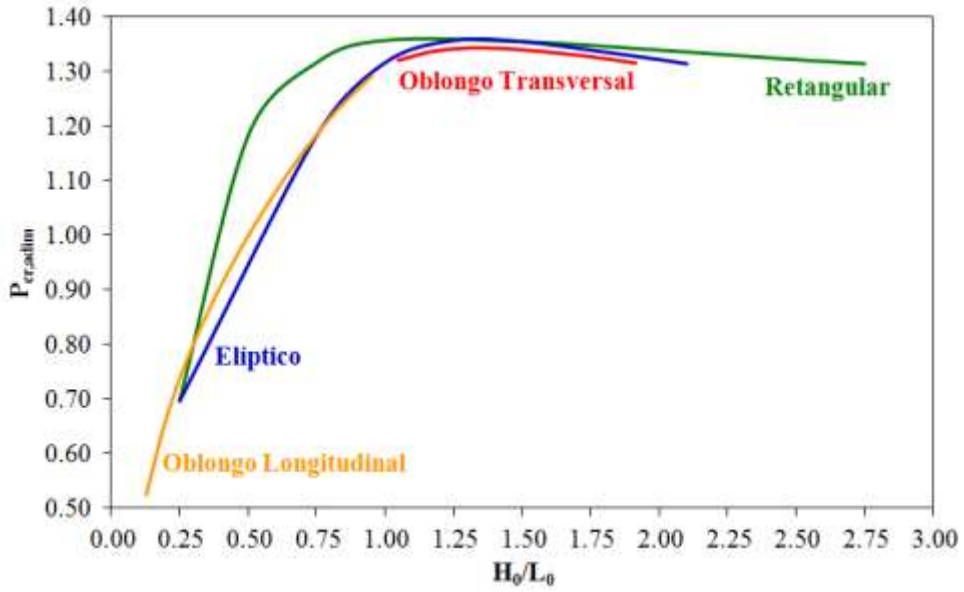

Figura 4: Carga crítica adimensional para os quatro tipos de furos em função do grau de liberdade H_0/L_0.

Analisando a FIGURA 4 é possível observar que o furo retangular abrange um maior intervalo de geometrias possíveis, com H_0/L_0 variando de 0.25 até 2.75. A geometria ótima para o furo retangular foi obtida para $(H_0/L_0)_o$ = 1.50 conduzindo a uma carga crítica adimensional máxima de $(P_{cr,adim})_m$ = 1.32. Já o furo elíptico se mostrou como o melhor tipo de furo entre os avaliados nesse trabalho, ou seja, gerou o maior valor de carga crítica adimensional máxima $(P_{cr,adim})_m$ = 1.36 com uma geometria ótima $(H_0/L_0)_o$ = 1.25, quando comparado comas cargas críticas adimensionais máximas dos furos retangular, oblongo longitudinal e oblongo transversal. Além disso, a geometria do furo elíptico apresentou uma faixa possível de $0.25 \leq H_0/L_0 \leq 2.10$. Sobre os furos oblongos, é possível notar que os mesmos se complementam, ou seja, o furo oblongo longitudinal apresenta geometrias possíveis na faixa $0.13 \leq H_0/L_0 \leq 0.95$ enquanto o furo oblongo transversal varia em um intervalo $1.05 \leq H_0/L_0 \leq 1.92$. A geometria otimizada para o furo oblongo longitudinal foi obtida para $(H_0/L_0)_o$ = 0.95 com $(P_{cr,adim})_m$ = 1.29. Para o furo oblongo transversal um valor maximizado para a carga crítica adimensional de $(P_{cr,adim})_m$ = 1.34 foi alcançado com a geometria ótima $(H_0/L_0)_o$ = 1.32.

Para mostrar a importância e a influência da geometria do sistema na busca por performances superiores, a seguir serão feitas comparações entre a melhor e a pior geometria para cada tipo de furo analisado. Na FIGURA 5, para o furo retangular, a

geometria otimizada é comparada com a pior geometria H_0/L_0 = 0.25 (Fig. 5(a)) que conduziu a uma carga crítica adimensional de $P_{cr,adim}$ = 0.73.

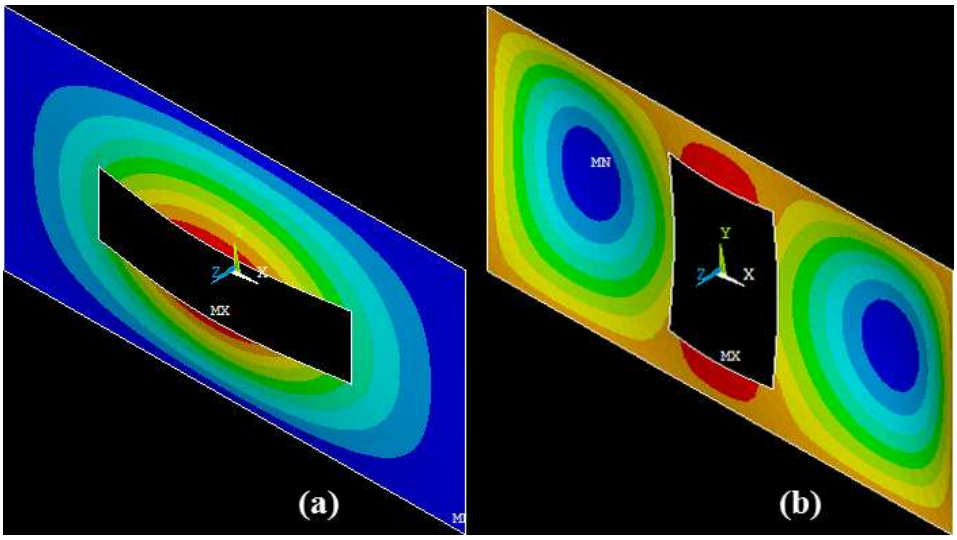

Figura 5: Forma flambada da placa com furo retangular: (a) pior geometria; e (b) geometria ótima.

Na FIGURA 5(a) é possível observar que somente uma meia onda foi formada na flambagem elástica da pior geometria, já na geometria otimizada foram geradas três meias ondas na configuração deformada. Isso explica o aumento de 80.82 % obtido com a geometria ótima, pois nela é necessária uma carga crítica que forme três meias ondas na placa, enquanto que na pior geometria é necessária uma carga crítica que gere somente uma meia onda.

Para a placa com furo elíptico, a pior geometria entre as estudadas (FIGURA 6(a)), definida por H_0/L_0 = 0.25 e um $P_{cr,dim}$ = 0.70, é apresentada juntamente com a geometria otimizada (FIGURA 6(b)).

Novamente, na FIGURA 6, é possível notar a formação de somente uma meia onda na pior geometria e de 3 meias ondas na geometria ótima, justificando o comportamento mecânico superior de 94.29 %.

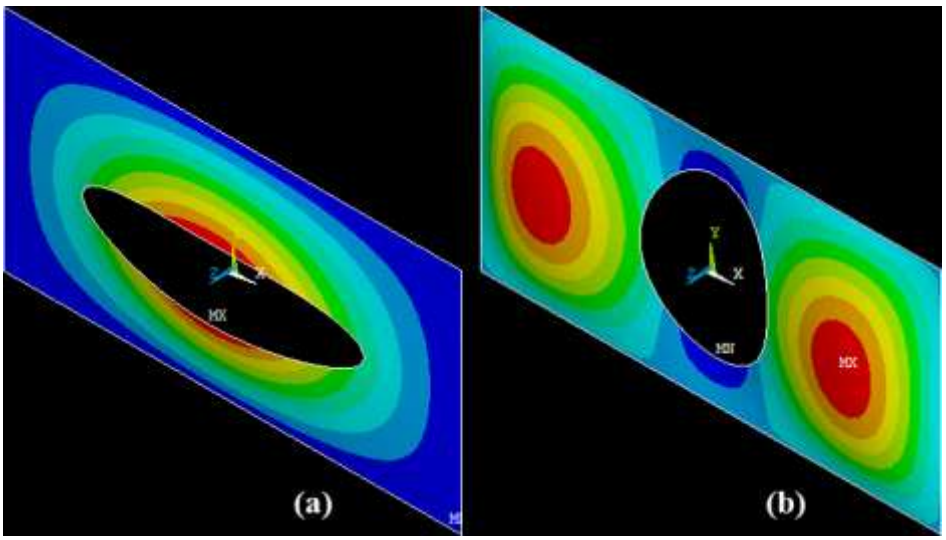

Figura 6: Forma flambada da placa com furo elíptico: (a) pior geometria; e (b) geometria ótima.

Para o furo oblongo longitudinal (FIGURA 7), que é formado por um retângulo e por dois semicírculos, foi observado um comportamento análogo aos dos furos retangular e elíptico, ou seja, a geometria ótima para o furo oblongo longitudinal (FIGURA 7(b)) conduziu à uma carga crítica 143.40 % maior que a alcançada com a pior geometria (H_0/L_0 = 0.13 e um $P_{cr,dim}$ = 0.53). É possível ainda notar que a geometria ótima nesse tipo de furo se aproxima de um furo circular (FIGURA 7(b)).

Por fim, na Fig. 8, são mostradas as formas flambadas para a pior (FIGURA 8(a)) e a melhor (FIGURA 8(b)) geometrias para o furo oblongo transversal. Nesse caso, a pior geometria foi obtida com duas meias ondas (FIGURA 8(a)), enquanto na geometria ótima são geradas três meias ondas (FIGURA 8(b)). Como comentado anteriormente, a faixa de variação de H_0/L_0 para o furo oblongo transversal é bastante restrita, fato que se reflete em uma melhoria de somente 1.52 % quando a carga crítica da geometria ótima é comparada com a da pior geometria.

Cabe destacar que o modelo numérico usado na determinação da carga crítica de flambagem considera um comportamento linear-elástico do material da placa. Então, os resultados apresentados aqui são válidos somente se a carga crítica não causar uma tensão crítica superior à tensão de escoamento do material da placa. Se a tensão de escoamento for ultrapassada, uma análise numérica não-linear deverá ser realizada, considerando não-linearidades geométrica e de material.

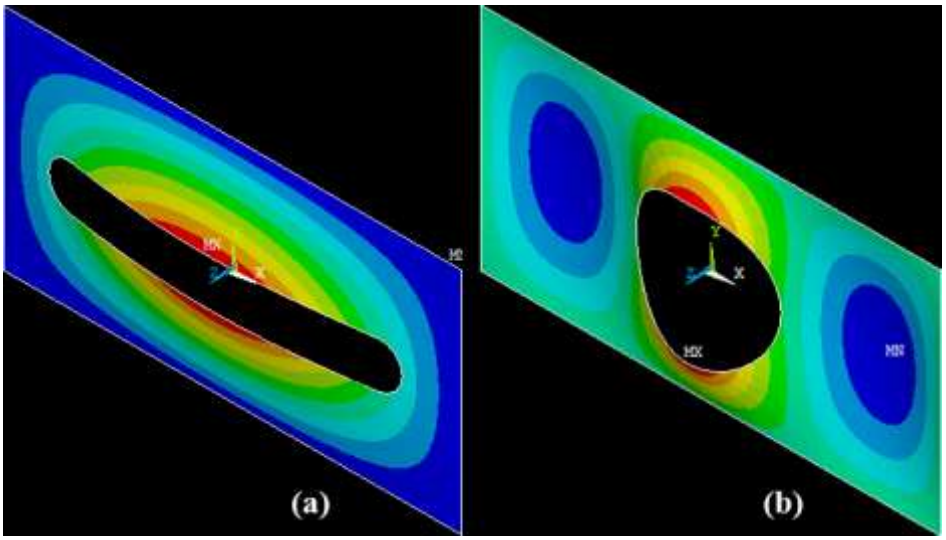

Figura 7: Forma flambada da placa com furo oblongo longitudinal: (a) pior geometria; e (b) geometria ótima.

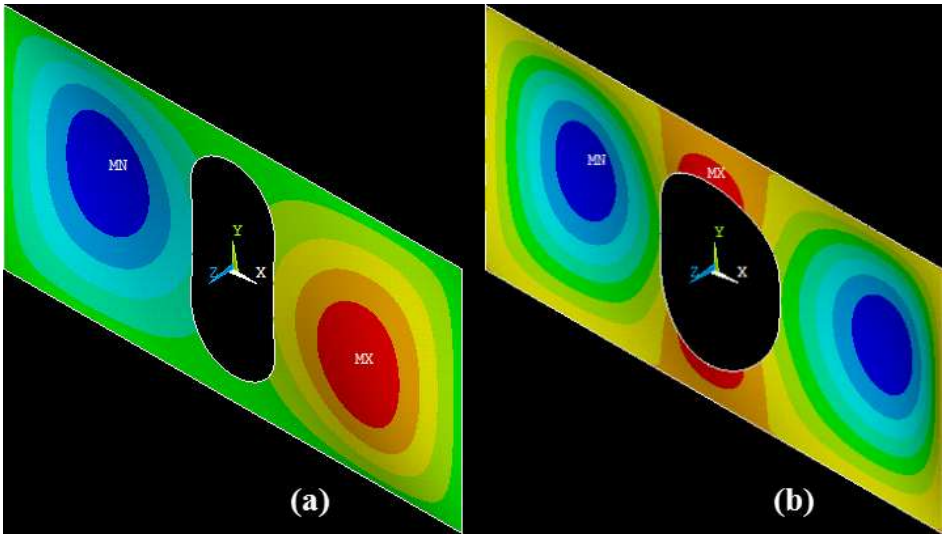

Figura 8: Forma flambada da placa com furo oblongo transversal: (a) pior geometria; e (b) geometria ótima.

4. CONCLUSÕES

Ao término desse trabalho foi possível avaliar a influência da geometria de quatro diferentes tipos de furos na flambagem elástica de placas de aço perfuradas. Para isso um modelo computacional verificado foi associado ao método *Constructal Design*, permitindo simular numericamente os diversos casos propostos e realizar uma comparação justa entre os mesmos, uma vez que a fração volumétrica das perfurações foi mantida constante.

Foi observado que a geometria do furo tem grande influência no comportamento mecânico sob flambagem elástica das placas perfuradas. Somente uma simples variação na geometria da perfuração conduziu a uma melhoria de 80.82 %, 94.29 % e 143.40 % para os furos do tipo retangular, elíptico e oblongo longitudinal, respectivamente. Já para o furo oblongo transversal, essa melhoria não se mostrou tão efetiva, sendo apenas de 1.52 %. Isso se deve ao fato de que o furo oblongo transversal possui um intervalo restrito de geometrias, diferentemente dos outros tipos de furos analisados.

Se uma comparação entre os tipos de furo for realizada, considerando as geometrias ótimas entre os casos estudados, fica indicado que o furo elíptico possui um comportamento mecânico sob flambagem elástica 1.49 %, 3.03 % e 5.43 % superior se comparado aos furos oblongo transversal, retangular e oblongo longitudinal, respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÅKESSON, B. **Plate buckling in bridges and other structure**. London, UK. Taylor & Francis, 2007.

[2] ANSYS. **User's Manual** (version 10.0), Swanson Analysis System Inc., Houston, 2005.

[3] BEJAN, A. **Shape and structure, from engineering to nature**. Cambridge, UK. Cambridge University Press, 2000.

[4] BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with constructal theory**. Hoboken, USA. Wiley, 2008.

[5] CHENG; ZHAO, J. Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 48, p. 905-914, 2010.

[6] EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. **Thin-Walled Structures**, v. 39 , p. 983–998, 2001.

[7] EL-SAWY, K. M.; MARTINI, M. I. Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plates with a single circular hole. **Thin-Walled Structures**, v. 45, p. 122–33, 2007.

[8] ISOLDI, L. A.; REAL, M. V.; CORREIA, A. L. G.; VAZ, J.; SANTOS, E. D.; ROCHA, L. A. O. Flow of stresses: constructal design of perforated plates subjected to tension or buckling. In: **Constructal Law and the Unifying Principle of Design** - Rocha, L. A. O.; Lorente, S.; Bejan, A. (Ed.). Understanding Complex Systems. 1ed. New York, USA, Springer New York, v. 1, p. 195-217, 2013.

[9] LORENTE, S. et al. The flow of stresses concept: the analogy between mechanical strength and heat convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, p. 2963-2968, 2010.

[10] MADENCI, E.; GUVEN, I. **The finite element method and applications in engineering using ANSYS®**. Ed. Springer, 2006.

[11] MEGSON, T. H. G. **Structural and stress analysis**. Ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

[12] MOEN, D.; SCHAFER, B. W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. **Thin-Walled Structures**, v. 47, p. 1597-1607, 2009.

[13] PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. New York, USA. Ed. Dover Publications, 1985.

[14] REAL, M. V.; ISOLDI L. A. Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes. In: **Southern Conference on Computational Modeling**, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Brasil, p. 69-73, 2010.

[15] ROCHA, L. A. O.; REAL, M. V.; CORREIA, A. L. G.; VAZ, J.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. Geometric optimization based on the constructal design of perforated thin plates subject to buckling. **Computational Thermal Sciences**, v. 4, p. 119-129, 2012.

[16] ROCHA, L. A. O.; ISOLDI, L. A.; REAL, M. V.; DOS SANTOS, E. D.; CORREIA, A. L. G. ; BISERNI, C.; LORENZINI, G. Constructal design applied to the elastic buckling of thin plates with holes. **Central European Journal of Engineering**, v. 3, p. 475-483, 2013.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande (FURG), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul (FAPERGS) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio.