PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES COM PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS VARIÁVEIS EM CÉLULAS DE COMBUSTÍVEL NUCLEAR RETANGULARES

MARCELO FERREIRA PELEGRINI[1], THIAGO ANTONINI ALVES[2], RICARDO ALAN VERDÚ RAMOS[3], CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA[4]

RESUMO

Neste trabalho foi apresentada a solução de problemas difusivos transientes em células de combustível nuclear retangulares que apresentam fontes de geração de calor uniformes e propriedades termofísicas variáveis em seu domínio submetidas às condições de contorno de *Dirichlet*. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi linearizada fazendo uso da Transformada de *Kirchhoff* sobre o potencial temperatura. Para a determinação da distribuição da temperatura na célula de combustível a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) foi utilizada sobre a equação da difusão no domínio. Os parâmetros físicos de interesse foram determinados para diversas razões de aspecto. Os resultados obtidos foram comparados com os da solução pela Técnica de Volumes Finitos utilizando o *software* comercial *ANSYS*^{TM}.

PALAVRAS-CHAVES: PROBLEMAS DIFUSIVOS NÃO-LINEARES. REGIME TRANSIENTE. TRANSFORMADA INTEGRAL. TRANSFORMADA DE *KIRCHHOFF.* GEOMETRIA RETANGULAR.

TRANSIENT DIFFUSION PROBLEMS WITH VARIABLE THERMOPHYSICAL PROPERTIES IN RECTANGULAR NUCLEAR FUEL CELL

ABSTRACT

Transient diffusion problems solution were presented in this work considering cylindrical fuel cells with rectangular cross-section with uniformly distributed sources and variable thermophysical properties in its domain submitted to *Dirichlet* boundary conditions. In order to facilitate the analytical treatment, the diffusion equation has been linearized by Kirchhoff Transform application in a temperature potential. To obtain the distribution of the temperature in the fuel cell the Generalized Integral Transform Technique (GITT) was used onto the diffusion equation in the domain of the cell. Interesting physical parameters have been evaluated for several cylinder aspect ratios. The results obtained have been compared with finite volume solution obtained by commercial software *ANSYS*^{TM}.

KEYWORDS: NON-LINEAR DIFFUSION PROBLEMS. TRANSIENT REGIME. INTEGRAL TRANSFORM. KIRCHHOFF TRANSFORM. RECTANGULAR GEOMETRY.

[1]Petrobras, Doutorando DEM/UNESP/Ilha Solteira; e-mail: mpelegrini@gmail.com
[2]Professor, DAMEC/UTFPR/Ponta Grossa; e-mail: thiagoaalves@utfpr.edu.br
[3]Professor, DEM/UNESP/Ilha Solteira; e-mail: ramos@dem.feis.unesp.br
[4]Professor, DEM/UNESP/Ilha Solteira; e-mail: cassio@dem.feis.unesp.br

1. INTRODUÇÃO

As células de combustível em reatores nucleares de potência apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica proveniente da reação de fissão nuclear do elemento físsil [1]. Do ponto de vista econômico, uma maior eficiência na transferência da energia gerada pelo elemento físsil para o fluido de trabalho, possibilita a construção de reatores de menores dimensões, bem como o estabelecimento de um inventário menor de combustível nuclear [2]. Dessa forma, entre os diversos fatores que influenciam o processo de transferência de calor, as dimensões geométricas e o formato desses elementos desempenham um papel preponderante [3].

Diante da necessidade de solução mais precisa para modelos físicos realísticos é imperativo o contínuo desenvolvimento de novas metodologias que possa contemplar, por exemplo, o acoplamento entre as equações de conservação, a não-linearidade das relações constitutivas, processos com mudança de fase, a presença de contornos com geometria não-regular, problemas com fronteiras móveis, condições de contorno não-lineares, entre outros [4]-[16].

Neste contexto, técnicas híbridas analítico-numéricas vêm ganhando destaque em diversas áreas de interesse da Engenharia, por garantirem maior confiabilidade dos resultados por elas obtidos. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG [17], é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser poderosa e eficiente na solução de problemas de transferência de calor e massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Neste sentido, o presente trabalho apresenta a solução de problemas difusivos transientes com fontes de geração de calor uniformemente distribuídas em células cilíndricas de seção transversal retangular e que utilizam o dióxido de urânio, UO_2, como combustível. Para esta análise, foram consideradas propriedades termofísicas variáveis, perfil de temperatura inicial uniforme e condição de contorno de *Dirichlet*. Devido à natureza não-linear da equação da difusão do problema proposto, a Técnica da Transformada de *Kirchhoff* foi aplicada para a linearização do termo difusivo da equação da energia. Feito isso, a equação da energia resultante foi resolvida através da aplicação da TTIG e a evolução da distribuição de temperatura foi determinada utilizando-se corretamente às fórmulas de inversão de todas as transformações efetuadas. Os parâmetros físicos de interesse para diversos formatos retangulares foram, então, calculados e comparados, quando possível, com os resultados obtidos numericamente através da Técnica de Volumes Finitos com o auxílio do *software* comercial *ANSYS*^{TM}.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme proposto, foi estabelecido que o termo-fonte no problema físico estudado é uniformemente distribuído na pastilha de combustível. Não foi tratada aqui a transferência de calor na camisa e na folga camisa-pastilha. Toda a análise foi feita somente para o problema difusivo no material físsil. Como a variação da temperatura periférica da camisa é relativamente desprezível quando comparada com a magnitude das variações de temperatura presentes em toda a célula, foi prescrito aqui a condição de temperatura constante no contorno da pastilha (condição de contorno de *Dirichlet*). A equação da difusão no domínio Ω e contorno Γ, é expressa por:

$$\nabla \cdot k(T)\nabla T(x,y,t) + \dot{q}''' = \rho c_p(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} \ , \quad \left\{(x,y)\in \Omega, \quad t>0\right\}, \tag{1}$$

$$T(x,y,t) = T_p, \quad \left\{(x,y)\in \Gamma, \quad t>0\right\}, \tag{2}$$

$$T(x,y,0) = T_i = T_p \ , \quad \left\{(x,y)\in \Omega, \quad t>0\right\} . \tag{3}$$

sendo que $k(T)$ é a condutividade térmica do material, ρ é a massa específica do material, $c_p(T)$ é o calor específico do material e $\dot{q}'''$ representa o termo-fonte, T_P é a temperatura da superfície da pastilha e T_i representa a condição de temperatura inicial do problema.

2.1. Linearização da Equação da Difusão

Para facilitar o procedimento analítico, a equação da difusão foi adequadamente linearizada através da aplicação da Transformada de *Kirchhoff*[18] sobre o potencial $T(x,y,t)$:

$$\nabla^2 T^*(x,y,t) + \frac{\dot{q}'''}{k_0} = \frac{1}{\alpha(T^*)}\frac{\partial T^*(x,y,t)}{\partial t} \ , \quad \left\{(x,y)\in \Omega, \quad t>0\right\} , \tag{4}$$

$$T_p^*(x,y,t) = \frac{1}{k_0}\int_{T_0}^{T_p} k(T')dT' = T_p^* \ , \quad \left\{(x,y)\in \Gamma, \quad t>0\right\} , \tag{5}$$

$$T^*(x,y,0) = T_i^* = T_p^* \ , \quad \left\{(x,y)\in \Omega, \quad t>0\right\} , \tag{6}$$

com, $\alpha\,(T^*) = k\,(T^*) / \rho\, c_p\,(T^*)$ e $T^*(x,y,t)$. Os parâmetros T_p^* e T_i^* são, respectivamente, os potenciais temperatura de contorno e inicial transformados.

2.2. Adimensionalização da Equação da Energia

Na sua forma adimensional, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno, (1), (2) e (3), são reescritas como:

$$\nabla^2\theta(X,Y,\tau)+1=\frac{\partial\theta(X,Y,\tau)}{\partial\tau}\ , \quad \left\{(X,Y)\in\Omega,\quad \tau>0\right\}\ , \tag{7}$$

$$\theta(X,Y,\tau)=\theta_p=0\ , \quad \left\{(X,Y)\in\Gamma,\quad \tau>0\right\}\ , \tag{8}$$

$$\theta(X,Y,0)=\theta_i=0\ , \quad \left\{(X,Y)\in\Omega\right\}\ , \tag{9}$$

com:

$$X=\frac{x}{L_{ref}}\ ,\quad Y=\frac{y}{L_{ref}}\ ,\quad \tau=\frac{t\,\alpha(T)}{L_{ref}^2}\ ,\quad \theta(X,Y,\tau)=\frac{\left[T^*(X,Y,\tau)-T_p^*\right]}{L_{ref}^2\,\dot{q}'''}k_0\ ,\quad L_{ref}=\frac{A_s}{Per}\ . \tag{10}$$

sendo que L_{ref} representa um comprimento de referência, A_s representa a área da seção transversal e *Per* o perímetro. Para o presente problema, foi admitido desprezível os efeitos de segunda ordem referente a variação local de τ com a difusividade térmica na transformação temporal de t para τ. Para caracterizar as diversas possibilidades de geometrias retangulares empregou-se o parâmetro razão de aspecto ρ_{aspec} expresso por:

$$\rho_{aspec}=L/l\ . \tag{11}$$

Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na FIGURA 1. Pode ser observado a simetria em relação ao eixo *X* e ao eixo *Y* de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante conforme destacado pela região sombreada.

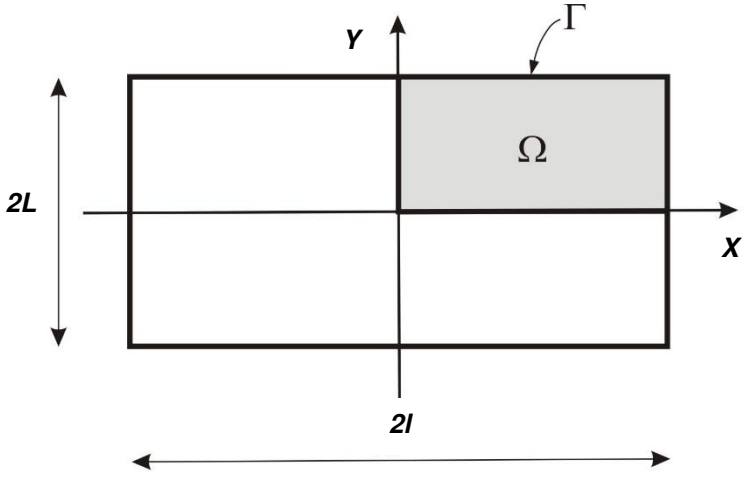


Figura 1. Geometria proposta para o problema.

Neste contexto, para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$\frac{\partial^2\theta(X,Y,\tau)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta(X,Y,\tau)}{\partial Y^2}+1=\frac{\partial\theta(X,Y,\tau)}{\partial\tau}\ ,$$
$$\left\{0\le X\le I/L_{ref}\ ,\quad 0\le Y\le L/L_{ref}\ ,\quad \tau>0\right\} \tag{12}$$

$$\theta(X,Y,0)=0\ ,\qquad \left\{0\le X\le L_{ref}\ ,\quad 0\le Y\le L/L_{ref}\right\}\ ; \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta(X,Y,\tau)}{\partial X}=0\ ,\qquad \left\{X=0,\quad 0\le Y\le L/L_{ref}\ ,\quad \tau>0\right\}\ ; \tag{14}$$

$$\frac{\partial\theta(X,Y,\tau)}{\partial Y}=0\ ,\qquad \left\{0\le X\le I/L_{ref}\ ,\quad Y=0,\quad \tau>0\right\}\ . \tag{15}$$

$$\theta(X,Y,\tau)=0\ ,\qquad \left\{X=I/L_{ref}\ ,\quad 0\le Y\le L/L_{ref}\ ,\quad \tau>0\right\}\ , \tag{16}$$

$$\theta(X,Y,\tau)=0\ ,\qquad \left\{0\le X\le I/L_{ref}\ ,\quad \mathrm{Y}=L/L_{ref}\ ,\quad \tau>0\right\}\ , \tag{17}$$

2.3. Aplicação da TTIG

Os perfis de temperatura característicos do problema proposto foram obtidos a partir da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) sobre sua equação característica. Devido a sua propriedade bidimensional, o potencial $\theta(X,Y,\tau)$ foi escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial [19]. Portanto, a aplicação da TTIG, para cada um dos problemas propostos, foi feita em partes. Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2\psi(X)}{d\,X^2}+\mu^2\,\psi(X)=0\ ,\qquad \left\{0<X<I/L_{ref}\ \right\}\ , \tag{18}$$

$$\psi'(0)=0\ ,\qquad \psi\left(I/L_{ref}\right)=0\ \ . \tag{19}$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são:

$$\mu_i=\frac{(2i-1)\pi}{2\,I/L_{ref}}\ ,\qquad \psi_i(X)=cos(\mu_i\,X)\ ,\qquad i=1,2,3... \tag{20}$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(Y,\tau) = \int_0^{l/L_{ref}} K_i(X)\,\theta(X,Y,\tau)\,dX\,, \quad \textit{transformada}; \tag{21}$$

$$\theta\ (X,Y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(X)\,\bar{\theta}_i(Y,\tau), \quad \textit{inversa}. \tag{22}$$

sendo que $\bar{\theta}_i(Y,\tau)$ é o potencial transformado em X e $K_i(X)$ são as autofunções normalizadas:

$$K_i(X) = \frac{\psi_i(X)}{N_i^{1/2}}, \qquad N_i = \int_0^{l/L_{ref}} \psi_i^2(X)\,dX = \frac{l}{2L_{ref}}\ . \tag{23}$$

Efetuando o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(X)$ com a equação da difusão e fazendo uso das condições de contorno dadas por (14), (15), (16) e (17) e da equação que define o problema auxiliar de autovalor, (18), obtém-se que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(Y)\frac{\partial\bar{\theta}_j(Y,\tau)}{\partial\tau} + \mu_i^2\bar{\theta}_i(Y,\tau) = \frac{\partial^2\bar{\theta}_i(Y,\tau)}{\partial Y^2} + C_i(Y)\,, \qquad i = 1,2,3... \tag{24}$$

$$A_{ij}(Y) = \int_0^{l/L_{ref}} K_i(X)K_j(X)\,dX\,, \qquad C_i(Y) = \int_0^{l/L_{ref}} K_i(X)\,dX\ . \tag{25}$$

Para proceder a Transformação Integral relativa a coordenada Y, considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2\phi(Y)}{dY^2} + \lambda^2\,\phi(Y) = 0\,, \qquad \{\,0 < Y < L/L_{ref}\,\}\ ; \tag{26}$$

$$\phi'(0) = 0\,, \qquad \phi(L/L_{ref}) = 0\ . \tag{27}$$

Os autovalores e as autofunções para este novo problema auxiliar são:

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L/L_{ref}}\,, \qquad \phi_m(Y) = cos(\lambda_m Y)\,, \qquad m = 1,2,3... \tag{28}$$

As autofunções $\phi_m(Y)$ são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = \int_0^{L/L_{ref}} \int_0^{I/L_{ref}} K_i(X) Z_m(Y) \theta(X,Y,\tau)\, dX\, dY\,, \quad \textit{transformada}; \tag{29}$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(X)\ Z_m(Y) \tilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau)\,, \quad \textit{inversa}. \tag{30}$$

sendo que, $Z_m(Y)$ são as autofunções normalizadas e são dadas por:

$$Z_m(Y) = \frac{\phi_m(Y)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{L/L_{ref}} \phi_m^2(Y)\, dY = \frac{L}{2L_{ref}}\,. \tag{31}$$

sendo que, M_m são as integrais de normalização.

A Transformação Integral sobre a coordenada Y é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(Y)$ com a equação diferencial transformada na coordenada X. Feito isso, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em Y, obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\tilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijmn} \frac{d\tilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau)}{d\tau} + \left[\mu_i^2 + \lambda_m^2\right] \tilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) + D_{im} = 0\,, \quad i,m = 1,2,3... \tag{32}$$

$$B_{ijmn} = \int_0^{L/L_{ref}} Z_m(Y)\, Z_n(Y)\, A_{ij}(Y)\, dY = \int_0^{I/L_{ref}} \int_0^{L/L_{ref}} K_i(X) K_j(X) Z_m(Y)\, Z_n(Y)\, dY dX\,, \tag{33}$$

$$D_{im} = -\int_0^{L/L_{ref}} Z_m(Y)\, C_i(Y)\, dY = -\int_0^{I/L_{ref}} \int_0^{L/L_{ref}} K_i(X) Z_m(Y)\, dY\, dX\,. \tag{34}$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\bar{\theta}}_{im}(0) = \int_0^{I/L_{ref}} \int_0^{L/L_{ref}} K_i(X)\ Z_m(Y)\, \theta_i(X,Y)\, dY\, dX \quad . \tag{35}$$

O potencial transformado $\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)$ pode ser obtido numericamente truncando-se a expansão para uma dada ordem *M* e *N*:

$$\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} B_{ijmn}\ \frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{d\tau}+\left[\mu_i^2+\lambda_m^2\right]\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)+D_{im}=0\ . \tag{36}$$

O potencial temperatura $\theta(X,Y,\tau)$ é obtido, então, através da fórmula de inversão dada por:

$$\theta(X,Y,\tau)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{m=1}^{N} K_i(X)Z_m(Y)\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau). \tag{37}$$

Obviamente, quanto maior *N* e *M* maior será a precisão dos resultados, sendo que, do ponto de vista computacional, o duplo somatório poderia ser resolvido como proposto por [20], permitindo a redução deste custo através do reordenamento dos termos e substituição por um somatório simples. No entanto, pela simplicidade do problema em questão, isso não se faz necessário.

2.4. Parâmetros Físicos de Interesse

2.4.1. Constante de Tempo

Para a análise dos problemas em questão é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento difusivo transiente em função da razão de aspecto. Para tal, foi definida a função potencial temperatura normalizada $\theta_N(X,Y,\tau)$ em termos da temperatura máxima do domínio no regime permanente, $\theta_{máx}(\infty)$:

$$\theta_N(X,Y,\tau)=\frac{\theta(X,Y,\tau)}{\theta_{máx}(\infty)}\ . \tag{38}$$

Consequentemente a esta definição, o potencial normalizado máximo e médio que ocorre no domínio, para um dado instante τ, são dados por:

$$\theta_{N\,máx}(\tau)=\frac{\theta_{máx}(\tau)}{\theta_{máx}(\infty)},\qquad \theta_{N\,méd}(\tau)=\frac{\theta_{méd}(\tau_{méd})}{\theta_{méd}(\infty)}. \tag{39}$$

De (25), pode ser observado que o potencial $\theta_{N\ máx}(\tau)$ estará compreendido no intervalo [0,1]. D, define-se a constante de tempo τ_c foi definida como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura $\theta_{N\ máx}(\tau)$ esteja a *1*/*e* do seu

valor em regime permanente, ou seja,

$$\frac{\theta_{máx}(\tau_{máx})}{\theta_{máx}(\infty)} = \left[1 - \frac{1}{e}\right] = 0{,}63212 \ . \tag{40}$$

2.4.2. Temperatura média

A temperatura média no domínio em um dado instante τ é dada por:

$$\theta_{méd}(\tau) = \frac{\left[T_{méd}(X,Y,\tau) - T_p\right]}{L_{ref}^2 \ \dot{q}'''} k = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \theta(X,Y,\tau)\, dA = \frac{4}{A_s} \int_0^{L/L_{ref}} \int_0^{l/L_{ref}} \theta(X,Y,\tau)\, dX\, dY \ . \tag{41}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os coeficientes B_{ijmn} e D_{im}, necessários para o cálculo do potencial transformado $\tilde{\tilde{\theta}}_{lm}$, foram obtidos a partir de integração pelo Método de Quadratura de *Gauss*. Para consistência na formulação numérica, os valores das autofunções foram também calculados nos pontos de quadratura. Este potencial transformado foi calculado resolvendo-se o sistema de EDO, com o auxílio da rotina computacional *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL Fortran* [21]. Foi observado que a convergência da série que determina o potencial temperatura fica mais lenta no início do transiente (τ < 0,01), principalmente quando a razão de aspecto tende a 1. Para estes casos foi necessário truncar a série que determina o potencial temperatura θ (X,Y,τ) em uma ordem N, M superior a 25 termos para obtenção de um mínimo de 4 dígitos de precisão. À medida que τ aumentava, foi observado que a série convergia com um número bem menor de termos.

Após este procedimento, utilizando-se corretamente das fórmulas de inversão de todas as transformações efetuadas, os resultados dimensionais para a célula de UO_2 especificada foram obtidos considerando-se as propriedades termofísicas variáveis. A condutividade térmica [22] e o calor específico [23], que variam devido às grandes variações de temperatura à que está submetido o material físsil, foram dados respectivamente, por:

$$k(T) = \left(\frac{4040}{464 + T} + 0{,}0132 \ e^{0{,}00188\, T} \right), \tag{42}$$

$$c_p(T) = c_1 + 2\, c_2 \Theta + 3\, c_3\, \Theta^2 + 4\, c_4\, \Theta^3 + 5\, c_5\, \Theta^4 - c_6\, \Theta^{-2} \ , \tag{43}$$

sendo que, ambas as propriedades termofísicas são dadas no SI, Θ = T/1000, T é a temperatura termodinâmica absoluta [K]; c_1 = 193,2380 , c_2 = 162,8647 , c_3 = –104,0014 , c_4 = 29,2056 , c_5 = –1,9507 e c_6 = 2,6441.

A TABELA 1 apresenta as condições iniciais e de contorno para o problema estudado, além do valor do termo-fonte. A taxa de geração calor foi determinada de forma que o nível de temperatura no centro da célula atingisse, em regime permanente, valores típicos que são da ordem de 1.800 K.

Tabela 1. Parâmetros Térmicos e Geométricos da pastilha de UO_2 estudada.

Parâmetro	Símbolo	Magnitude	Unidade
Temperatura na condição inicial	T_i	700	K
Temperatura na condição de contorno	T_p	700	K
Termo-Fonte	$\dot{q}'''$	580	MW
Área da seção da pastilha do reator PWR	A_{past}	78,5	mm^2

A FIGURA 2 ilustra o comportamento da distribuição da temperatura na célula de combustível nuclear retangular para uma razão de aspecto igual a 0,5. A TABELA 2 apresenta os resultados obtidos para o comportamento transiente da temperatura dimensional da célula de UO_2 de mesma razão de aspecto, considerando-se as propriedades termofísicas constantes e variáveis. E, finalmente, a TABELA 3 apresenta os resultados obtidos para as constantes de tempo média e máxima relativas ao presente problema.

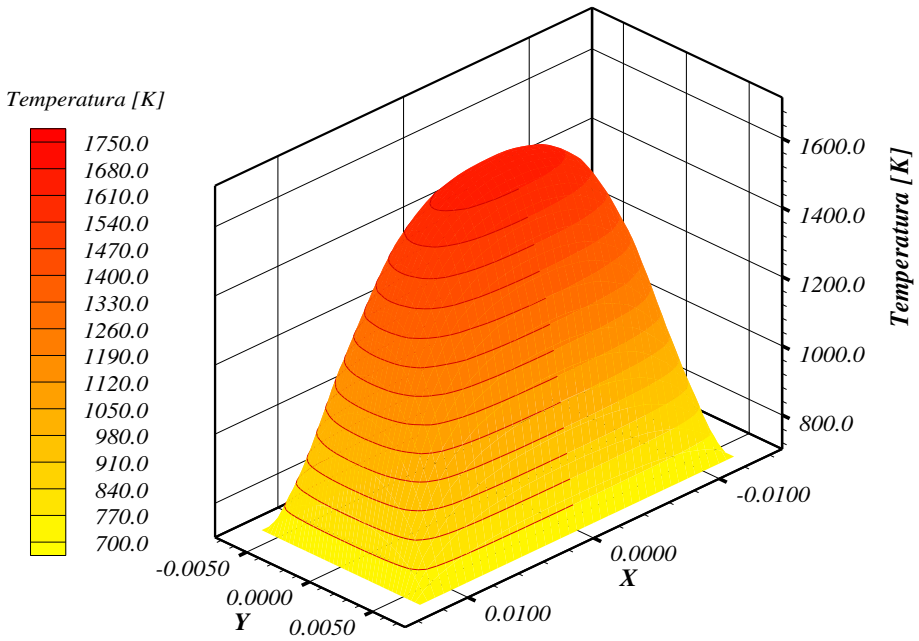


Figura 2. Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível nuclear de seção transversal retangular para ρ_{aspec} = 0,50 e $\tau = \tau_c$.

Tabela 2. Valores da temperatura para a célula de combustível de UO_2, $\rho_{aspec} = 0{,}50$.

t [s]	Propriedades constantes		Propriedades variáveis		
	$T_{máx}$ [K]	$T_{méd}$ [K]	$T_{máx}$ [K]	$T_{máx}^{(1)}$ [K]	$T_{méd}$ [K]
0,02	700,8	700,8	700,8	700,8	700,7
0,03	701,7	701,6	701,6	701,6	701,5
0,05	702,3	702,2	702,4	702,4	702,2
0,08	704,6	704,3	704,0	704,1	703,7
0,11	706,9	706,4	705,6	705,6	705,2
0,16	710,3	709,5	708,0	708,2	707,3
0,32	719,4	717,4	715,8	715,8	714,1
0,47	730,7	726,9	723,5	723,6	720,5
0,79	751,1	743,2	738,8	739,2	732,6
1,11	768,1	756,0	753,9	754,9	743,9
1,58	802,1	780,2	776,0	777,8	759,6
3,17	914,1	850,5	846,2	853,5	804,6
4,75	1020,5	909,0	910,9	925,4	842,0
7,91	1206,3	1001,4	1024,7	1051,4	902,4
11,08	1355,6	1070,1	1121,9	1161,3	950,2
15,83	1521,6	1142,6	1243,5	1296,5	1006,2
31,66	1762,6	1242,9	1510,0	1569,4	1115,2
47,49	1835,8	1272,8	1649,1	1690,3	1164,4
79,14	1859,1	1282,3	1759,1	1768,2	1197,5
110,80	1860,6	1282,9	1787,1	1787,8	1204,4
136,13	1861,0	1283,0	1793,1	1793,5	1205,7
139,29	1861,0	1283,0	1793,4	1793,5	1205,7

(1) Resultado obtidos pelo Método de Volumes Finitos com o auxílio do *software* comercial *ANSYS*.

Tabela 3. Constantes de tempo para temperatura máxima e média.

ρ_{aspec}	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$
0,10	0,5210	0,4774
0,20	0,6817	0,5829
0,30	0,9096	0,7227
0,40	1,1908	0,8964
0,50	1,4798	1,0888
0,60	1,6826	1,2631
0,70	1,7277	1,3784
0,80	1,6834	1,4263
0,90	1,6634	1,4254

4. CONCLUSÕES

A utilização de técnicas híbridas analítico-numéricas para solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos tem conquistado a comunidade técnico-científica devido à sua precisão e ao seu baixo custo computacional quando comparado aos métodos puramente numéricos. Neste contexto, foi analisado no presente trabalho o problema difusivo transiente em células de combustível nuclear retangulares com fontes de geração de calor uniformes e propriedades termofísicas variáveis submetidas a condições de contorno de *Dirichlet* utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) para a solução da equação da energia. Foi observado que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente. Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima e à temperatura média foram também calculadas para diversas razões de aspecto. Finalizando, neste trabalho a TTIG foi aplicada com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais.

REFERÊNCIAS

[1] GLASSTONE, S.; SENONSKE, A., **Nuclear reactor engineering: reactor system engineering**. London, UK. Chapman & Hall, 1994.

[2] MAIA, C. R. M. S**olução de problemas difusivos e difusivos-convectivos em domínios de geometria elíptica e bicôncava pela técnica da transformada integral generalizada**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2003.

[3] PELEGRINI, M. F. A**plicação da técnica da transformada integral para solução de problemas difusivos transientes com propriedades termofísicas variáveis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Ilha Solteira, 2005.

[4] ANTONINI ALVES, T. **Aplicação da transformada integral e da transformação conforme na solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos em domínios de geometrias não-convencionais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Ilha Solteira, 2006.

[5] PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T.; MAIA, C. R. M.; RAMOS, R. A. V. Limiting thermal energy generation rate inside nuclear fuel rods with variables sources. In: **18TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**. 2005, Ouro Preto: Proceedings of COBEM 2005, code 2438.

[6] MAIA, C. R. M.; RAMOS, R. A. V. RAMOS; PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T. Heat transfer study in slug flow on elliptical ducts cross section by Generalized Integral Transform Technique. **Thermal Engineering**, v. 4, p. 154-163, 2005.

[7] MAIA, C. R. M.; APARECIDO, J. B.; MILANEZ, L. F. Heat transfer in laminar flow of non-newtonian fluids in ducts of elliptical cross section. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 45, p. 1066-1072, 2006.

[8] COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; SPHAIER, L. A. ; QUARESMA, J. N. N. Unified Integral Transforms Algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems. **Numerical Heat Transfer, Part A, Applications**, v. 63, p. 840-866, 2013.

[9] CHALHUB, D. J. M. N.; SPHAIER, L. A.; ALVES, L. S. B. Integral Transform solution of convective heat transfer problems using upwind approximations. **Numerical Heat Transfer, Part B, Fundamentals**, v. 63, p. 167-187, 2013.

[10] SPHAIER, L. A.; BARLETTA, A. Unstable mixed convection in a heated horizontal porous channel. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 78, p. 77-89, 2014.

[11] ANTONINI ALVES, T.; PELEGRINI, M. F.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Limiting power of nuclear fuel cells with variable sources. **International Journal of Science and Advanced Technology**, v. 4, p. 07-15, 2014.

[12] PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Transient heat diffusion problems with variable thermal properties solved by Generalized Integral Transform Technique. **International Review of Mechanical Engineering (Testo Stampato)** v. 8, p. 931-940, 2014.

[13] PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T.; NISHIDA, F. B.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Hybrid analytical-numerical analysis of SAE 4150 alloy steel rods cooling. **Advanced Materials Research**, v. 1082, p. 187-190, 2014.

[14] KNUPP, D. C.; COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KAKAÇ, S. Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral Transforms with single domain formulation. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 88, p. 248-257, 2015.

[15] KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Fluid flow and conjugated heat transfer in arbitrarily shaped channels via single domain Formulation and Integral Transforms. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 82, p. 479-489, 2015.

[16] ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Aplicação da Transformada Integral Generalizada e da Transformação Conforme na solução de um problema de convecção forçada laminar em dutos de setor de anel circular. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 32, p. 261-269, 2016.

[17] COTTA, R. M. **The integral transform method in thermal and fluids science and engineering**. New York, USA. Begell House Inc., 1998.

[18] ÖZISIK, M. N. **Heat conduction**. New York, USA. John Wiley & Sons, 1993.

[19] APARECIDO, J. B. How to choose eigenvalues problems when using generalized integral transforms to solve thermal. In: **14TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**. 1997, Bauru: Proceedings of COBEM 1997.

[20] MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M. Ordering rules for double or triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 23, p. 299-303, 1996.

[21] IMSL Library, 1979, Edition 7, *GNB Buildin*, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036.

[22] FINK, J. K. Termophysical properties of uranium dioxide. **Journal of Nuclear Materials**, v. 279, p. 1-18, 2000.

[23] CARBAJO, J. J.; YODER, G. L.; POPOV, S. G.; IVANOV, V. K. A review of the thermophysical properties of MOX and UO_2 fuels. **Journal of Nuclear Materials**, v. 299, p.181-198, 2001.