ANÁLISE NÃO LINEAR BIDIMENSIONALDE VIGA DE CONCRETO ARMADO REFORÇADA COM PRFC

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA[1]

RESUMO

Como alternativa aos métodos tradicionais de reforço, surgiram os polímeros reforçados com fibras, usualmente de carbono (PRFC), denominados materiais compósitos avançados. As vantagens desse material de reforço em relação aos tradicionais são a sua alta resistência e rigidez específica, além de ótima resistência à fadiga e facilidade de aplicação. O objetivo deste estudo é a modelagem bidimensional, por meio do Método dos Elementos Finitos, de vigasbiapoiadas de concreto armado reforçadas com PRFC encontradas na literatura. O comportamento mecânico do concreto é descrito por um modelo constitutivo baseado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo, e o PRFC por um modelo elástico linear. O deslizamento relativo entre o reforço externo e o concreto é simuladopelo elemento de interface de linha, considerando o amolecimento exponencial no modelo constitutivo. A partir da comparação dos resultados numéricos com os experimentais, a modelagem proposta apresenta potencialidade na análise de estruturas de concreto armado reforçadas com PRFC devido a sua reduzida complexidade e baixo custo computacional.

PALAVRAS-CHAVES:CONCRETO.ELEMENTO DE INTERFACE DE LINHA.MECÂNICA DO DANO.

TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAM STRENGTHENED WITH CFRP

ABSTRACT

As an alternative to traditional methods, a new conception of advanced composite materials for strengthening structures has emerged. These composite materials are usually made of carbon fiber reinforced polymer (CFRP) laminates. The advantages of such advanced materials as compared to the traditional ones are their high specific strength and stiffness, high corrosion and fatigue resistance, besides the ease of application. The aim of this study is the bi-dimensional modeling, by means of Finite Element Method, of reinforced concrete bi-supported beams strengthened with CFRP, found in the literature. The mechanical behavior of concrete is described by constitutive model based on the Continuum Damage Mechanics theory, and the CFRP is simulated by a linear elastic model. The relative sliding between the external strengthening and the concrete is simulated by the line interface element, considering the exponential softening in the constitutive model. The nonlinear analyzes are performed using the Arc Length method with Newton - Raphson iterative procedure. From the comparison between the numerical and experimental results, the proposed modeling has potentiality in the analysis of reinforced concrete structures with CFRP, due to its reduced complexity and low computational cost.

KEYWORDS:CONCRETE. DAMAGE MECHANICS. LINE INTERFACE ELEMENT.

[1]Doutor, Engenharia Civil,Universidade Tecnológica Federal do Paraná; e-mail: lafarani@yahoo.com.br

1. INTRODUÇÃO

Desde o advento do concreto, ações de recuperação e reforço de estruturas vêm sendo praticadas, em escala crescente e, atualmente, constituem uma verdadeira arte. O volume de recursos efetivamente gastos ou que deveriam ser gastos com a manutenção, recuperação e reforço de estruturas de concreto atinge, anualmente, montantes da ordem de bilhões de dólares. Essas ações compõem um complexo ramo da engenharia, cujo impacto torna-se cada vez maior, à proporção que a demanda por reparos e manutenção aumenta a cada dia.Estratégias de reabilitação eficientes e que satisfaçam uma multiplicidade de restrições de projeto e execução representam o grande desafio a ser enfrentado[4].

Segundo Pavan *et al.*[11], o reforço é necessário para adequar a estrutura às condições de uso diferentes daquelas para as quais foi projetada. A recuperação está relacionada a situações em que, devido à deterioração da estrutura, deve-se restituir sua capacidade de carga original para que a mesma continue atendendo às exigências de projeto.

De todas as fibras sintéticas possíveis de serem utilizadas no reforço estrutural, destaca-se o sistema polimérico estruturado com fibra de carbono. A grande força de ligação entre os átomos de carbono, associada a sua leveza, faz desse compósito um material altamente promissor. Denominado de Polímero Reforçado com Fibra de Carbono (PRFC), ele pode ser encontrado em forma de mantas, tecidos, barras e laminados. As características dessa tecnologia incorporam algumas vantagens na execução, como o acréscimo insignificante de carga permanente e espessura mínima. Por ser bastante leve e não necessitar de escoramento há redução do custo com mão de obra e do tempo de paralisação da edificação [11].

Dificuldades na modelagem computacional de estruturas de concreto são decorrentes, entre outros fatores: da significativa diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; da não linearidade da relação tensão-deformação já para níveis de tensão relativamente baixos; dos fenômenos de fluência e retração que dependem, por exemplo, da umidade e temperaturas ambientes e das dimensões dos elementos estruturais; da fissuração do concreto, que pode ocorrer já nas primeiras idades; e da transmissão de esforços através das fissuras [2].

A Mecânica do Dano se fundamenta nos princípios gerais da Termodinâmica e constitui-se numa teoria constitutiva para sólidos com defeitos em sua microestrutura. Uma

das hipóteses da Termodinâmica é que os processos irreversíveis, levados em conta por um número finito de variáveis internas, ocorrem numa velocidade suficientemente baixa, de modo que podem ser aproximadas por uma sequência de estados de equilíbrio aos quais correspondem a valores instantâneos das variáveis representativas [13].

Neste artigo análisesestruturaisnão lineares bidimensionais são realizadas, por meio do Método dos Elementos Finitos, de vigasbiapoiadas de concreto armado reforçadas à flexão com quatro e sete lâminas de PRFC, ensaiadas por Beber[3]. As simulações computacionais são executadas com o auxílio do programa *Scilab*, versão 5.4.1.

Para simular o comportamento material distinto do concretoà tração e à compressão utiliza-se o modelo de Mazars [9], fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo.Para as armaduras longitudinais, emprega-se um modelo elastoplástico uniaxial, visto que em estruturas de concreto armado as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais.

A lâmina de fibra de carbono possui uma elevada resistência à tração e um comportamento linear até atingir a ruptura [1]. Desta forma, adota-se para representar comportamento deste material um diagrama tensão-deformação linear. Ao modelo do reforço é incorporado o critério de falha da Máxima Tensão.

O deslizamento relativo na interface entre o concreto e o reforço é avaliado a partir do elemento finito de interface de linha, proposto porSchellekens[15] e adaptado por Bueno [5]. No modelo constitutivo desse elemento, considera-se o fenômeno de amolecimento exponencial.

O método de Comprimento de Arco com o processo iterativo tipo Newton –Raphson é utilizado nas análises não lineares. Essa técnica se caracteriza por apresentar um controle concomitante de força e deslocamento.A partir da comparação dos resultados obtidos neste artigo com os experimentais apresentados por Beber [3], a modelagem proposta apresenta potencialidade na análise de estruturas de concreto armado reforçadas com PRFC devido a sua reduzida complexidade e baixo custo computacional.

2. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

2.1 Concreto

O modelo de dano proposto por Mazars[9] tem por base algumas evidências experimentais observadas em ensaios uniaxiais de corpo de prova em concreto, tendo por hipóteses fundamentais [13]:

- localmente o dano é devido a extensões (alongamentos) evidenciadas por sinais positivos, ao menos um deles, das componentes de deformação principal ($\varepsilon_i > 0$);

- o dano é representado por uma variável escalar $d \in [0,1]$, cuja evolução ocorre quando um valor de referência para a 'deformação equivalente' é superado;

- considera-se, portanto, que o dano seja isótropo, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo);

- o concreto danificado comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

A relação constitutiva é dada por [16]:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathrm{d}\mathbf{I})\mathbf{C^0}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1}$$

onde **I** é o tensor identidade e $\mathbf{C^0}$ é o tensor constitutivo elástico do material íntegro. O estado de extensão é localmente caracterizado por uma deformação equivalente ($\tilde{\varepsilon}$), que é expressa por:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{{\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_1}^2} \tag{2}$$

onde ε_i, i = 1,2, são componentes de deformação principal.

Nesse modelo, adota-se que o dano se inicia quando a deformação equivalente atinge um valor de deformação de referência ε_{d0}, determinado em ensaios de tração uniaxial em correspondência à tensão máxima.

O concreto, em relação aos modos de ruptura, apresenta um comportamento distinto a tensões de tração e de compressão. A ruptura do concreto por esforços de tração é ocasionada pela formação de fissuras e consequente perda de resistência normal à direção da fissura. Quanto à ruína na compressão, o concreto apresenta um comportamento que pode ser considerado como plástico, que é o esmagamento ocasionado pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras [8].

Considerando-se um carregamento continuamente crescente ou radial, das curvas tensão-deformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão, podem ser

determinadas explicitamente as variáveis de dano d_T e d_C da seguinte forma, respectivamente:

$$d_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{(B_T\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (3)$$

$$d_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{(B_C\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4)$$

onde A_T e B_T são parâmetros característicos do material em tração uniaxial, A_C e $B_C$são parâmetros do material em compressão uniaxial, e ε_{d0}é a deformação específica elástica limite. Os subíndices T e C significam tração e compressão, respectivamente.

2.2 Aço

Um modelo uniaxial é utilizado para descrever o comportamento das armaduras, uma vez que em estruturas de concreto armado as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. No modelo computacional implementado, o aço é representado como um material elastoplásticocom o mesmo comportamento em tração e em compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear. Assim, a tensão no aço é determinada por:

$$\sigma = \begin{cases} E_{s0}\varepsilon, & \text{se } -B_1\sigma_y \leq \varepsilon \leq B_1\sigma_y \\ E_{st}\varepsilon & \text{, caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

onde E_{s0} é o módulo de elasticidade longitudinal inicial do aço, σ_yé a tensão de escoamento, $E_{st} = k_s E_s$é o módulo de elasticidade longitudinal após o escoamento, e B_1é o parâmetro do modelo.

2.3 Polímero reforçado com fibra de carbono

Para a lâmina de PRFC, adota-se a relação constitutiva linear expressa matematicamente por:

$$\sigma = E_r\varepsilon \quad (6)$$

onde E_r é o módulo de elasticidade do material, e εé a deformação específica.

3. TEORIA DA MÁXIMA DEFORMAÇÃO

Para o material PRFC, adota-se como critério de falha o da Máxima Deformação. A falha ocorre quando a inequação a seguir for satisfeita:

$$B_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{\text{últ}}}\right)^2 \geq 1 \qquad (7)$$

onde ε_1 é a deformação principal na direção 1, $\varepsilon_{\text{últ}}$ é a deformação específica última à tração ou à compressão na direção 1, e B_2 é o parâmetro do modelo.

4. ELEMENTO DE INTERFACE DE LINHA

Neste artigo foram utilizados elementos de interface de linha para simular a ligação entre o concreto e a lâmina de PRFC. Baseado o trabalho de Schellekens[15] e adaptado por Bueno [5], este elemento é definido pelo seu comprimento e seus nós apresentam dois graus de liberdade (u, v). Na FIGURA1 é apresentado um desenho esquemático do mesmo nas configurações indeformada e deformada.

O elemento de interface unidimensional é isoparamétrico, com quatro pontos nodais, funções de forma lineares e espessura zero. Devido à espessura zero, é suficiente representá-lo através de pseudonós equivalentes 1' e 2', como é mostrado na FIGURA 2.

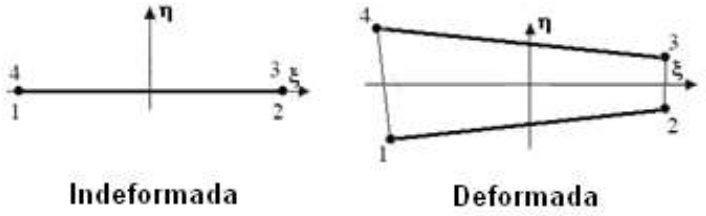

Figura 1. Configuração indeformada e deformada do elemento de interface de linha.
Fonte: PALIGA et al.[10].

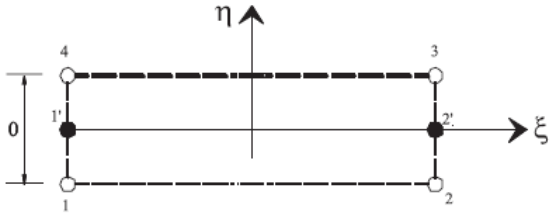

Figura 2. Representação do elemento de interface através de pseudo nós.
Fonte: PALIGA et al. [10].

O vetor de deslocamentos nodais **u** é dado por:

$$\mathbf{u} = [\mathrm{u}_1 \quad \mathrm{v}_1 \quad \mathrm{u}_2 \quad \mathrm{v}_2 \quad \mathrm{u}_3 \quad \mathrm{v}_3 \quad \mathrm{u}_4 \quad \mathrm{v}_4]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

onde $\mathrm{u_i}$ e $\mathrm{v_i}$, $\mathrm{i} = 1, \cdots, 4$, são os deslocamentos nodais na direção ξ e η, respectivamente. O operador **B**, que relaciona os deslocamentos nodais ao campo de deslocamentos relativos do elemento, é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1 & 0 & \mathrm{h}_2 & 0 & \mathrm{h}_3 & 0 & \mathrm{h}_4 & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_1 & 0 & \mathrm{h}_2 & 0 & \mathrm{h}_3 & 0 & \mathrm{h}_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde $\mathrm{h_i}$, $\mathrm{i} = 1, \cdots, 4$, são as funções de forma dadas por:

$$\mathrm{h}_1 = \mathrm{h}_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \tag{10}$$

$$\mathrm{h}_2 = \mathrm{h}_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \tag{11}$$

Usualmente, as tensões são avaliadas em função das deformações; entretanto, no caso das tensões na interface, as mesmas são determinadas em função dos deslocamentos relativos. O vetor de deslocamentos relativos ($\boldsymbol{\Delta}\mathbf{w}$) do elemento é determinado por meio da seguinte relação [5]:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{12}$$

Sendo **D** a matriz de propriedades do material, considerando que o elemento de interface de linha não tem dimensão na direção η e que a espessura e é constante ao longo do comprimento do mesmo, a matriz de rigidez **K** é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathrm{e} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi \tag{13}$$

onde L é o comprimento do elemento. A matriz constitutiva **D** é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K_S & 0 \\ 0 & K_0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

onde K_S e K_0 denotam as componentes de rigidez horizontal (rigidez tangencial) e vertical (rigidez à tração), respectivamente.

No cálculo das componentes de rigidez da matriz **D**, considera-se o fenômeno de amolecimento exponencial no modelo constitutivo que écaracterizado pela curva na qual a rigidez tangencial e à tração decrescem exponencialmente em relação ao deslocamento relativo. A matriz **D**é escrita por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K_s' & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \geq w_c \rightarrow K_s' = K_s e^{-\theta w} \\ w < w_c \rightarrow K_s' = K_s \\ w \geq w_c \rightarrow K_0' = K_0 e^{-\theta w} \\ w < w_c \rightarrow K_0' = K_0 \end{cases} \tag{15}$$

ondeθ é o coeficiente de amolecimento exponencial, e w_c é a abertura da fissura crítica. A energia de fraturamento (G_f) para amolecimento exponencial pode ser obtida integrando-se a lei constitutiva e variando-se a abertura da fissura de 0 a ∞, obtendo-se [5]:

$$G_f = \frac{\sigma_u}{\Theta} \tag{16}$$

5. MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

5.1 Método de comprimento de arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson

O método de Comprimento de Arco caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de carga e deslocamento. Há duas incógnitas: o incremento do fator de força$\Delta\varphi$ e o vetor de incremento de deslocamento $\boldsymbol{\Delta u}$. Em cada passo de solução, as trajetórias de iteração são perpendiculares aos arcos, que por sua vez podem ser aproximados por tangentes à trajetória de equilíbrio [14]. Considerando o método de arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson, as equações de equilíbrio para i-ésima iteração podem ser escritas como:

$$\mathbf{K_T}\Delta\mathbf{u}^i = \Delta\varphi^i\mathbf{R_0} + \Delta\mathbf{Q}^{i-1} \tag{17}$$

onde$\Delta\varphi^{i}$ é o incremento do fator de carga da iteração i, $\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}$é o vetor incremento de deslocamento, $\mathbf{R_0}$é o vetor de cargas de referência, $\mathbf{K_T}$é a matriz de rigidez tangente atualizada em cada iteração do passo de carga, e $\Delta\mathbf{Q}^{\mathbf{i-1}}$é o vetor de forças não equilibradas dado por:

$$\Delta\mathbf{Q}^{\mathbf{i-1}} = \mathbf{R_{ext}}^{\mathbf{i-1}} - \mathbf{F_{int}}^{\mathbf{i}} \tag{18}$$

onde$\mathbf{R_{ext}}^{\mathbf{i-1}}$é o vetor das forças externas e $\mathbf{F_{int}}^{\mathbf{i}}$é o vetor de forças nodais internas. O vetor $\mathbf{R_{ext}}^{\mathbf{i-1}}$ deve ser escrito em função do fator de forçaφ^{i-1}, atualizado ao final da iteração anterior, e do vetor de forças de referência $\mathbf{R_0}$, constante, por meio da seguinte relação:

$$\mathbf{R_{ext}}^{\mathbf{i-1}} = \varphi^{i-1}\mathbf{R_0} \tag{19}$$

Para um sistema de ordem n+1, equivalendo n ao número de graus de liberdade da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_T} & -\mathbf{R_0} \\ (\Delta\mathbf{u^1})^{\mathbf{T}} & \Delta\varphi^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}} \\ \Delta\varphi^{i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{\mathbf{i-1}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

onde$\Delta\mathbf{u^1}$ é o primeiro vetor de incrementos de deslocamento do passo de solução, e $\Delta\varphi^1$é o primeiro incremento do fator de força no referido passo. Nota-se que a resolução do sistema dado pela Equação (20) gera um sistema de equações com solução nãotrivial, mesmo que a matriz $\mathbf{K_T}$ seja singular.

No entanto, há o problema da matriz de rigidez não ser simétrica. A fim de contornar esse problema, Wessels[17] propôs uma alternativa que consistiu em dividir o vetor de incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}$ em duas parcelas: $\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{Q}}$ e $\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}}$. Essas parcelas são obtidas pela resolução do sistema:

$$\mathbf{K_T}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{Q}} = \Delta\mathbf{Q}^{\mathbf{i-1}} \tag{21}$$

$$\mathbf{K_T}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R_0} \tag{22}$$

O incremento do fator de força é obtido por:

$$\Delta\varphi^{i} = -\frac{(\Delta\mathbf{u^1})^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{Q}}}{(\Delta\mathbf{u^1})^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + \Delta\varphi^1} \tag{23}$$

5.2 Critérios de convergência

Com o objetivo de limitar os processos iterativos, dois critérios de convergência são estabelecidos, a saber: um para deslocamentos e outro para forças.

O critério de convergência para deslocamentos deve obedecer a seguinte relação:

$$\frac{\left\|\Delta \mathbf{u}^{\mathbf{i}}\right\|}{\left\|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{i}} \Delta \mathbf{u}^{\mathbf{j}}\right\|} \leq \mathrm{u}_{\mathrm{tol}} \tag{24}$$

onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento correspondente à iteração i, ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento acumulado, desde a primeira iteração até a i-ésima iteração.

O critério de convergência para forças deve obedecer a inequação dada por:

$$\frac{\left\|\Delta \mathbf{Q}^{\mathbf{i}}\right\|}{\left\|\varphi^{\mathrm{i}} \mathbf{R}_{\mathbf{0}}\right\|} \leq \mathrm{Q}_{\mathrm{tol}} \tag{25}$$

onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de força não equilibrada correspondente à iteração i, ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de força do passo de solução.

6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 Exemplo de validação do elemento de interface de linha

Este exemplo hipotético consiste em uma chapa quadrada de material homogêneo apresentado no trabalho de Bueno [5].A chapa possui uma descontinuidade na linha média entre a aresta apoiada e a aresta sobre a qual o carregamento atua (FIGURA3). Ao longo dessa descontinuidade são colocados elementos de interface de linha de comportamento elástico linear, que garantem a transmissão de esforços entre as duas partes da mesma. Uma força distribuída p de intensidade 800 N/m² é aplicada na extremidade livre da chapa ocasionando tração uniforme.

Supôs-se que o material que constitui a chapa apresenta comportamento elástico linear. Na TABELA 1 são apresentados os parâmetros geométricos e materiais. O peso próprio do material é negligenciado e assume-se o Estado Plano de Deformações.

Na discretização do domínio, a chapa foi modelada utilizando 16 elementos

quadrangulares lineares isoparamétricos e quatro elementos de interface de linha para a descontinuidade. Os resultados numéricos obtidos são confrontados com os resultados teóricos na TABELA 2.

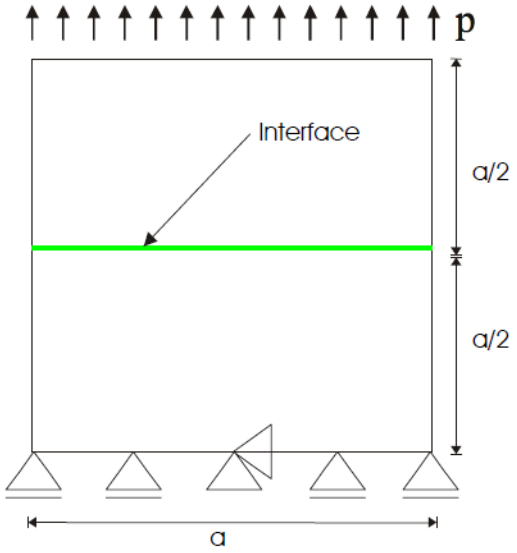

Figura 3. Chapa quadrada de material homogêneo e uma descontinuidade.
Fonte: Bueno [5].

Tabela 1. Parâmetros geométricos e materiais.

Símbolo	Parâmetro	Valor
a	Parâmetro geométrico da chapa	2 m
e	Espessura da chapa	1 m
E	Módulo de elasticidade do material da chapa	100 Mpa
ν	Coeficiente de Poisson do material da chapa	0,3
K_s	Rigidez tangencial da interface	1 MPa/m
K_0	Rigidez à tração da interface	1 MPa/m

Tabela 1. Resultados numéricose teóricos do elemento de interface submetido à tração.

Resultado Numérico Posição inferior Deslocamento		Resultado Numérico Posição superior Deslocamento	
u_x	u_y	u_x	u_y
0,0000031	0,0000073	0,0000031	0,0008073
0,0000016	0,0000073	0,0000016	0,0008073
$1,656\ 10^{-22}$	0,0000073	$-1,080\ 10^{-21}$	0,0008073
- 0,0000016	0,0000073	- 0,0000016	0,0008073
- 0,0000031	0,0000073	- 0,0000031	0,0008073
Resultado Numérico Deslocamento relativo		Resultado Teórico (Bueno [5]) Deslocamento relativo	

Δu_x	Δu_y	Δu_x	Δu_y
$-1{,}016\ 10^{-20}$	0,0008	0	0,0008
$-3{,}812\ 10^{-21}$	0,0008	0	0,0008
$-1{,}246\ 10^{-21}$	0,0008	0	0,0008
$-1{,}482\ 10^{-20}$	0,0008	0	0,0008
$-3{,}727\ 10^{-20}$	0,0008	0	0,0008

6.2 Viga ensaiada por Beber [3]

Os resultados obtidos pela modelagem proposta neste exemplo são comparados com os resultados experimentais apresentados por Beber [3], para vigas de concreto armado reforçadas à flexão com quatro e setelâminas de PRFC, com 0,011 cm de espessura cada uma, as quaissão fixadas na parte inferior das mesmaspor meio da técnica de aderência externa. A análise estrutural dessa viga também foi realizada pelos autores Aurich e Campos Filho[1] e Pinheiro e Real [12].

As vigas sãobiapoiadas com 2,5 m de comprimento, de seção transversal retangular com dimensões (12 x 25) cm^2 e sujeitas a duas forças concentradas P/2 (FIGURA 4). A armadura longitudinal inferior (A_{st}) das mesmas é constituída por dois ϕ10 mm e a superior (A_{sc}) por dois ϕ6,3 mm, com recobrimento de 0,015 m. Considerou-se aderência perfeita entre as armaduras longitudinais e oconcreto. Na TABELA 3 são apresentadas as propriedades mecânicas do concreto, do aço, das lâminas de PRFC e da interface entre o concreto e o reforço externo.

Dada à simetria de carregamento e geometria, discretizou-se por Elementos Finitos apenas metade da viga. A malha consiste de 90 elementos quadrangulares lineares isoparamétricos para simular o concreto, dez elementos de interface de linha para a ligação entre o concreto e o reforço externo, e 30 elementos de treliça para as armaduras longitudinais e a lâmina de PRFC, introduzidas como linhas de material mais rígido no modelo estrutural. Supôs-se o Estado Plano de Tensões e os erros máximos admitidos no final de cada incremento de força foram de $u_{tol} = 10^{-2}$ e $Q_{tol} = 10^{-2}$.

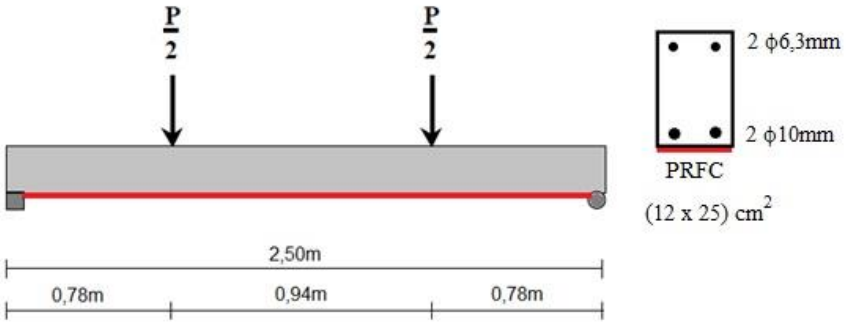

Figura 4. Esquema estrutural da vigabiapoiada.

Simulações com o modelo de dano de Mazars [9] podem conduzir a deformações excessivas na estrutura a partir de um determinado incremento de força [7]. Para limitar essas deformações, considerou-se durante as análises que o valor máximo da variável dano fosse menor do que um, isto é, $d_i < 1$, i = C, T.

Tabela 3. Propriedades mecânicas.

Material	Símbolo	Parâmetro	Valor
Concreto	E_{c0}	Módulo de elasticidade inicial do concreto	38311 MPa
	ν	Coeficiente de Poisson do concreto	0,2
	ε_{d0}	Deformação equivalente de referência	0,00005
Aço	E_{so}	Módulo de elasticidade inicial	210 GPa
	σ_y	Tensão de escoamento para ϕ10 mm	565 MPa
	σ_y	Tensão de escoamento para ϕ6,3 mm	738 MPa
	B_1	Constante (modelo elastoplástico)	0,6
	k_s	Constante (modelo elastoplástico)	0,1
Reforço (PRFC)	E_r	Módulo de elasticidade	230 GPa
	$\sigma_{últ}$	Tensão última	3400 MPa
	$\varepsilon_{últ}$	Deformação específica última	0,0148 m/m
Interface	K_s	Rigidez tangencial	50 GPa
	K_0	Rigidez à tração	50 GPa
	θ	Coeficiente de amolecimento exponencial	10
	w_c	Abertura de fissura crítica	0,001 m
	$\sigma_{últ}$	Tensão última de aderência	3500 MPa

a) Viga reforçada com quatro camadas de PRFC

As curvas experimentais e numéricas referentes aos deslocamentos verticais na seção central *versus* força para a viga reforçada com quatro lâminas de PRFC são mostradas na FIGURA 5. No que concerne aos parâmetros do modelo de dano de Mazars [9] e do critério da Máxima Deformação, esses se encontram na TABELA 4.

Tabela 4. Parâmetros do modelo de Mazars [9] e do critério de falha.

Material	Símbolo	Parâmetro	Valor
Concreto	A_T	Constante	0,25
	B_T	Constante	210
	A_C	Constante	0,25
	B_C	Constante	130
	d_t	Valor máximo do dano à tração	0,89
	d_c	Valor máximo do dano à compressão	0,89
PRFC	B_2	Parâmetro do critério de falha da Máxima Deformação	1,00

A distribuição do dano d na metade da viga é apresentada na FIGURA 6, em que pode ser visto o surgimento de fissuras na região tracionada bem como na comprimida. O dano determinado nos pontos de Gauss na integração numérica em cada elemento finito da malha surge quando a deformação equivalente atinge a deformação de referência ε_{d0}, ocasionando, assim, a diminuição da rigidez no ponto correspondente (o módulo de elasticidade se altera, tal que $E_{ci} = E_{c0}$ (1 - dj), j = C,T).

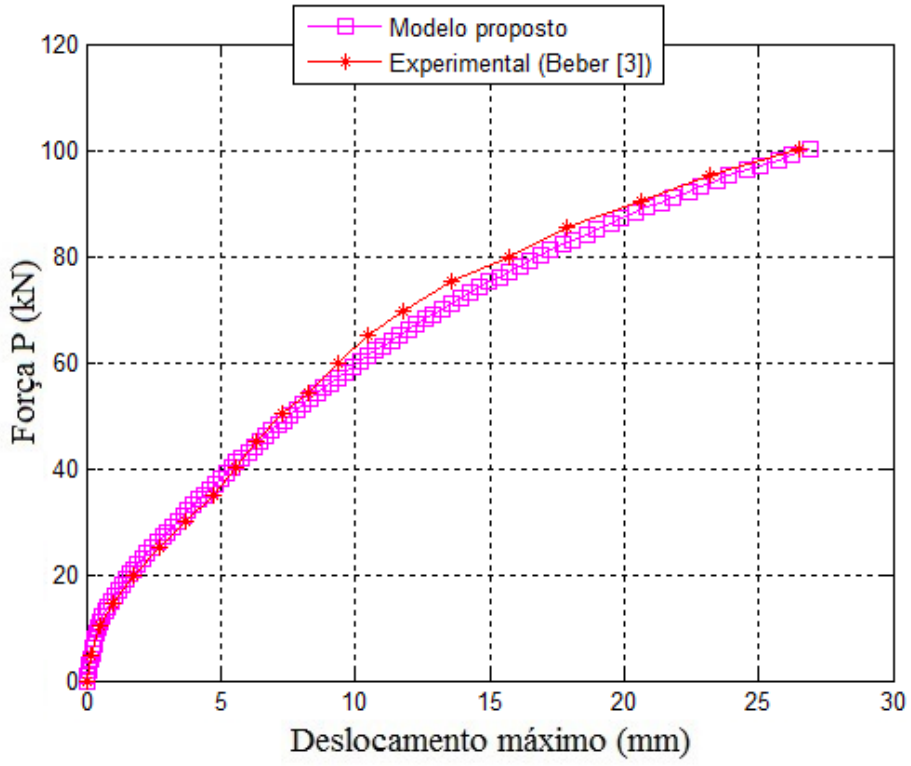

Figura 5. Curvas deslocamento máximo *versus* força.

Vê-se que, conforme a FIGURA 5, a resposta numérica predita pelo modelo implementado se aproximou do resultado experimental. No final da simulação, o modelo

numérico obteve maior precisão quanto à força de ruptura e deslocamento máximo, verificando-se a importância de análises não lineares no contexto da modelagem de estruturas em concreto armado, uma vez que possibilitam estimar de forma mais precisa e realística a capacidade última.

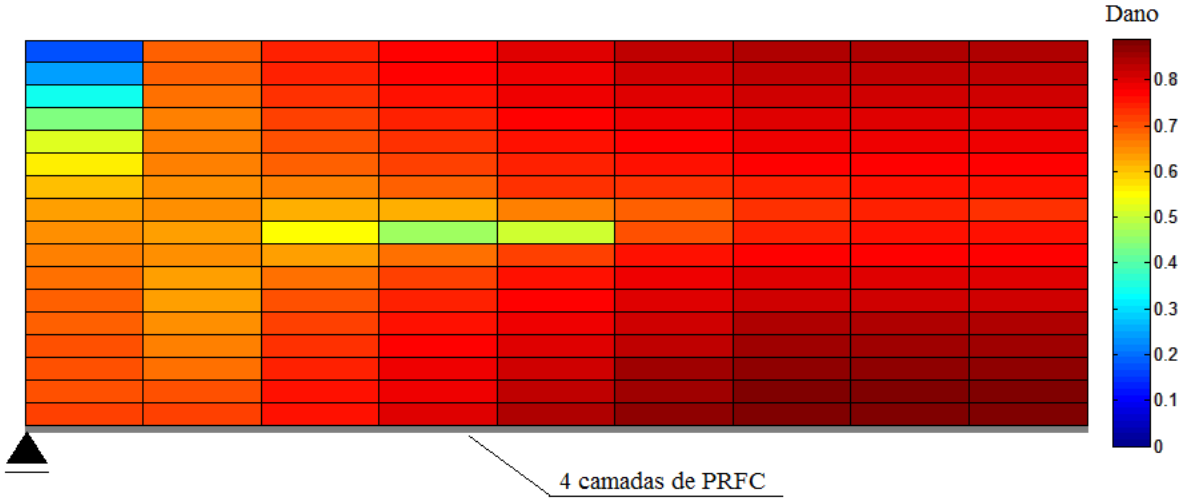

Figura 6. Distribuição do dano no concreto na metade da viga.

Na FIGURA 7 são apresentados os valores da tensão de aderência (obtidos numericamente em um dos pontos de Gauss)em função da distância do apoio. Vê-se que a tensão de aderência última (3,5 MPa) foi atingida em pontos próximos ao apoio. Segundo o ensaio realizado por Beber [3], a falha da viga ocorreu com o descolamento das lâminas de reforço (FIGURA 8).A partir do Critério da Máxima Deformação não houve a falha das lâminas de PRFC, ficando o valor numérico máximo da deformação específica nas mesmas igual a 0,0019 m/m, aproximadamente, ocorrendo próximo ao centro da viga.

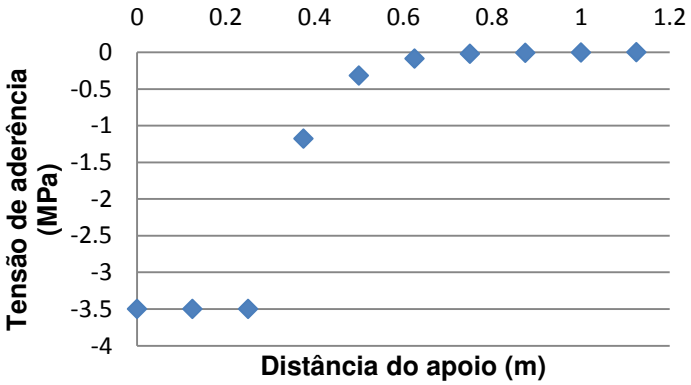

Figura 7. Tensão de aderência na interface entre o PRFC e o concreto.

Na simulação, o escoamento da armadura longitudinal inferior ocorreu sob a força de 62,105 kN, aproximadamente, ficando próxima ao valor da experimental (60,0 kN) apresentado por Beber *et al*. [4].

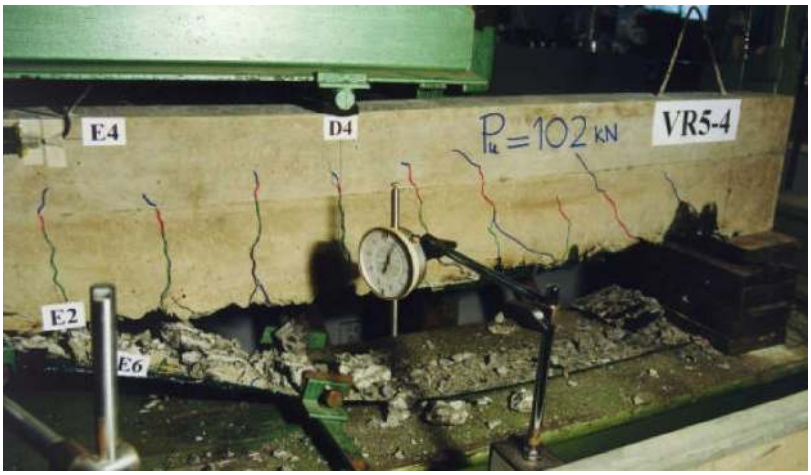

Figura 8. Ruptura por descolamento na viga reforçada com quatro lâminas de PRFC. Fonte: Beber [3].

b) Viga reforçada com sete camadas de PRFC

Na FIGURA 9 é apresentada a comparação entre os resultados experimentais e os numéricos obtidos a partir da modelagem proposta, em termos do deslocamento máximo *versus* força, para a viga reforçada com sete camadas de PRFC.Na TABELA 5 são apresentados os valores dos parâmetros do modelo de Mazars [9] e do critério de falha utilizados na simulação. A distribuição do dano na metade da viga é mostrada na FIGURA 10.

As tensões de aderência na interface entre o concreto e o reforço (obtidas numericamente em um dos pontos de Gauss) ao longo do comprimento da viga a partir do apoio são mostradas na FIGURA 11. Vê-se que o valor último da tensão de aderência é atingido, ocorrendo a falha do sistema de reforço estrutural próximo ao apoio. Dessa forma, a falha da viga se deu pelo descolamento do reforço externo, reproduzindo o comportamento observado nos ensaios realizados por Beber [3] (FIGURA 12).

Segundo o Critério da Máxima Deformação não houve a falha das lâminas de PRFC, ficando o valor numérico máximo da deformação específica nas mesmas à cerca de 0,0031 m/m, ocorrendo próximo ao centro da viga. O escoamento da armadura longitudinal inferior ocorreu sob a força de 81,843 kN, aproximadamente, ficando próxima ao valor da experimental (80,1 kN) apresentado por Beber *et al*. [4].

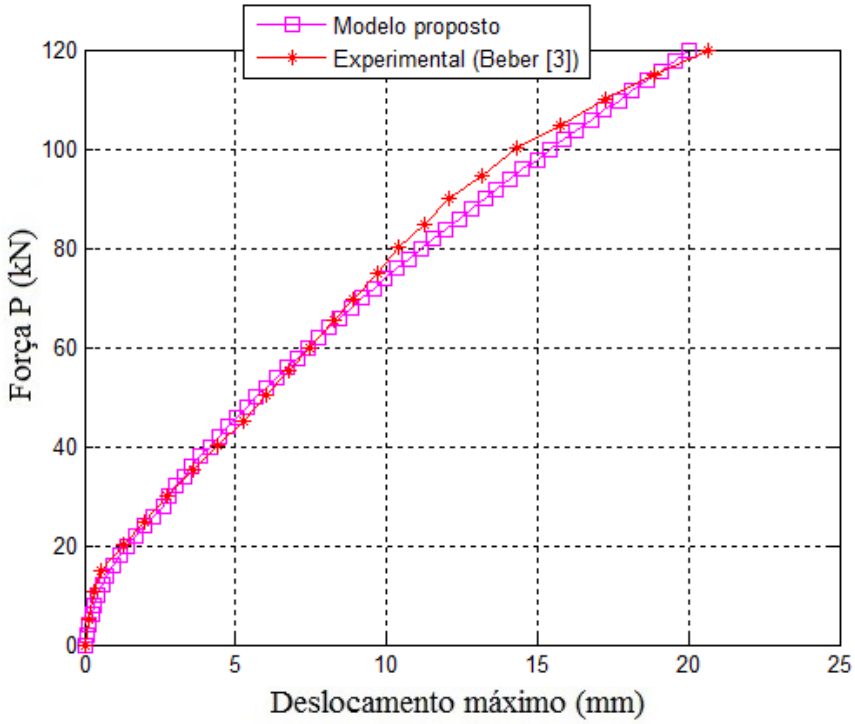

Figura 9. Curvas deslocamento máximo *versus* força.

Tabela5. Parâmetros do modelo de Mazars e do critério de falha.

Material	Símbolo	Parâmetro	Valor
Concreto	A_T	Constante	0,3
	B_T	Constante	120,0
	A_C	Constante	0,3
	B_C	Constante	50,0
	d_t	Valor máximo do dano à tração	0,74
	d_c	Valor máximo do dano à compressão	0,74
PRFC	B_2	Parâmetro do critério de falha da Máxima Deformação	1,0

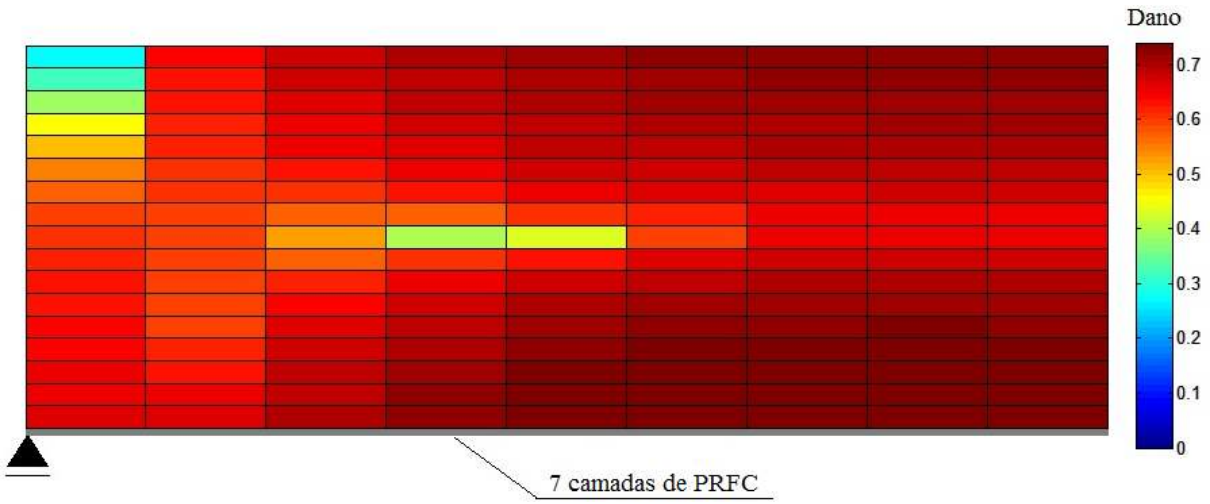

Figura 10. Distribuição do dano no concreto na metade da viga. Fonte: o próprio autor.

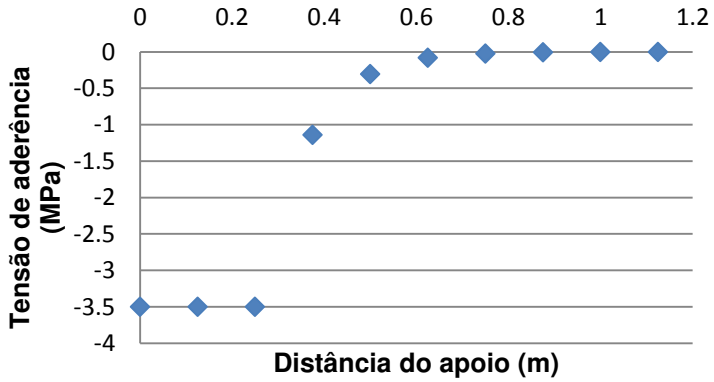

Figura 11. Tensão de aderência na interface entre o PRFC e o concreto.



Figura 12. Ruptura por descolamento na viga reforçada com sete lâminas de PRFC. Fonte: Beber [3].

7. CONCLUSÕES

A partir dos resultados numéricos obtidos, a modelagem proposta do problema de viga de concreto armado reforçada com PRFC, utilizando o Método dos Elementos Finitos e os modelos constitutivos simplificados, apresentou razoável concordância com os resultados experimentais disponíveis na literatura. A mesma apresenta potencialidade noreforço de estruturas de concreto armado, a partir da análise da capacidade resistente de vigasreforçadas à flexão com PRFC (deslocamento máximo e força de ruptura), permitindo avaliar a quantidade de reforço necessária.Resultados mais satisfatórios podem ser obtidos através de um estudo da influência dos parâmetros dos modelos quanto à resposta mecânica dos materiais – sensibilidade paramétrica.

Considerou-se que o concreto e as armaduras longitudinais tivessem perfeita aderência no modelo estrutural; no entanto, resultados mais precisos podem ser alcançados através da implementação de um modelo de aderência entre as barras de armadura e o concreto (como, por exemplo, o indicado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [6]), possibilitando,dessamaneira, prever os deslizamentos relativos e as tensões de aderência nas interfaces.

Em adição, análises numéricas com outros tipos de elementos finitos de maior ordem e refinamento de malha são necessárias, de maneira a realizar um estudo da influência da malha (convergência) na resposta do modelo quanto à distribuição de dano na viga. Problemas numéricos e instabilidades na convergência podem ocorrer em função da calibração dos parâmetros necessários nos modelos não lineares, sendo oneroso o processo, visto que diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AURICH, M.; CAMPOS FILHO, A. Análise da aderência em vigas de concreto armado reforçadas através do método dos elementos finitos. In: V **Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto**, São Paulo. Anais... V Simpósio EPUSP sobreEstruturas de Concreto, 2003.

[2] AURICH, M.; CAMPOS FILHO, A.; BITTENCOURT, T. N.; SHAH, S. P. Finite elemetmodeling of concrete behavior at early age. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 2, p. 37-58, 2009.

[3] BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas**

com lâminas de fibra de carbono. Dissertação (Mestrado) – CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFGRS), Porto Alegre, 1999.

[4] BEBER, A. J.; CAMPOS FILHO, A.; CAMPAGNOLO, J. L. Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com mantas flexíveis de fibra de carbono. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v.. 2, p. 75-84, 2001.

[5] BUENO, E. M. R. **Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), São Paulo, 1999.

[6] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214).

[7] GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N. Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**, v. 0202, n. 1, p. 1-12, 2002.

[8] LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados. **Cadernos de Engenharia de Estruturas (Online)**, v. 11, p. 17-35, 2009.

[9] MAZARS, J. **Aplication de lamécanique de l'endommagementaucomportament non lineare et à laruptureduбéton de structure**. Thése(Doctoratd'État), Université Paris 6, Paris, 1984.

[10] PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. Finite element model for numerical analysis of strengthened reinforced concrete structures. **IBRACON Structural Journal**, v. 3, n. 2, p. 177-200, 2007.

[11] PAVAN, R. C.; OLIVEIRA, B. F.; CREUS, G. J. FE analysis of reinforced concrete beams strengthened by composite plates. **Latin American JournalofSolidsandStructures**, v. 2, p. 253-267, 2005.

[12] PINHEIRO, L. C. L.; REAL, M. V. Método simplificado para a determinação da capacidade resistente de vigas de concreto armado reforçadas com polímero reforçado com fibras de carbono. **Vetor (FURG)**, Rio Grande, v. 23, n. 1, p. 69-84, 2013.

[13] PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

[14] RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: **Euro-US-Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, Berlin, 1981, Ruhr Universitat Bochum, Springer, p. 68-89.

[15] SCHELLEKENS, J. C. J. **Interface elements in finite elements analysis**. TNO-BI-90-165, 1990.

[16] TIAGO, C. M; LEITÃO, V. M. A. Application of radial basis functions to linear and non-linear structural analysis problems. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 51, n. 8, p. 1311-1334, 2006.

[17] WESSELS, M.**Das statische und dynamishedurchschlagsproblem der imperfektemflachenkugelchalebeielasticherrotatiossymmetrischerverformumg**. Dissertation, T.U. Hannover, Mitteil, n. 23 des ImstitutsfürStatik, 1977.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à FAPERGS (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul) e à UFFS (Universidade Federal da Fronteira Sul) pelo apoio.