MODELAGEM NUMÉRICA COMPUTACIONAL DE VIGA DE CONCRETO ARMADO COM ACOPLAMENTO DE TEORIAS

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA[1]

RESUMO

Este artigo faz uma proposta de modelagem para análise unidimensional de estruturas de concreto armado, através do Método dos Elementos Finitos, com o emprego de modelos constitutivos distintos para simular o concreto à tração e à compressão, em conjunto com o critério de falha de Tsai-Wu. As trajetórias de equilíbrio são fornecidas através de uma análise incremental iterativa baseada no método de Newton-Raphson modificado combinado com a técnica de comprimento de arco. Análises numéricas não lineares são efetuadas a partir do problema de uma viga encontrado na literatura, com o objetivo de avaliar aspectos envolvidos na modelagem computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Concreto. Critério de Resistência. Elementos Finitos. Mecânica do Dano.

COMPUTATIONAL NUMERICAL MODELING OF REINFORCED CONCRETE BEAM WITH COUPLING OF THEORIES

ABSTRACT

This paper makes a proposal of modeling for one-dimensional analysis of reinforced concrete structures, using the Finite Element Method, with the use of different constitutive models to simulate the concrete tensile and compression, together with the failure criterion of Tsai-Wu. The equilibrium trajectories are provided through an analysis based on the incremental iterative method of modified Newton-Raphson combined with arc-length technique. Non-linear numerical analyzes are carried out from the problem of a beam found in the literature aiming to analyze the aspects involved in computational modeling.

KEYWORDS: Concrete. Failure Criterion. Finite Element. Damage Mechanics.

1. INTRODUÇÃO

Uma evolução natural são os modelos que acoplam mais de uma teoria para a representação dos fenômenos relacionados ao comportamento do concreto, surgindo daí formulações quase sempre complexas [1]. No entanto, buscando diminuir o grau de complexidade das formulações, mas ainda levando-se em conta na sua formulação o acoplamento de efeitos, e por consequência de teorias, grande destaque tem sido dado aos chamados modelos constitutivos simplificados.

[1] Doutor em Métodos Numéricos. Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. E-mail: luiz.souza@uffs.edu.br.

Dificuldades na modelagem computacional de estruturas de concreto são decorrentes, entre outros fatores: da significativa diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; da não linearidade da relação tensão-deformação já para níveis de tensão relativamente baixos; dos fenômenos de fluência e retração que dependem, por exemplo, da umidade e temperaturas ambientes e das dimensões dos elementos estruturais; da fissuração do concreto, que pode ocorrer já nas primeiras idades; e da transmissão de esforços através das fissuras [2].

Este artigo faz um estudo numérico-computacional unidimensional de uma viga de concreto armado proposta por [7], por meio do Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de analisar os aspectos envolvidos na modelagem computacional, incluindo itens relativos aos modelos constitutivos dos materiais. A modelagem do elemento estrutural é feita com o programa gratuito Scilab, versão 5.3.3. Considera-se o modelo constitutivo clássico de dano proposto por Mazars [9] e o modelo adaptado de Elwi e Murray [3] para simular o comportamento do concreto à tração e à compressão, respectivamente. O material aço é simulado por um modelo constitutivo elastoplástico bilinear. Também ao modelo, é incorporado o critério de falha de Tsai e Wu [14].

A teoria de Tsai e Wu [14] foi escolhida por apresentar diversas vantagens em relação às inúmeras outras teorias existentes, como, por exemplo: é uma equação escalar e invariante, na qual os componentes de resistência são expressos em um tensor, e as propriedades de simetria do tensor podem ser determinadas rigorosamente.

2. MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

O concreto, em relação aos modos de ruptura, apresenta um comportamento distinto a tensões de tração e compressão. A ruptura do concreto por esforços de tração é ocasionada pela formação de fissuras e consequente perda de resistência normal à direção da fissura. Quanto à ruína na compressão, o concreto apresenta um comportamento que pode ser considerado como plástico, que é o esmagamento ocasionado pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras [8].

2.1 Relação tensão-deformação uniaxial para compressão

O modelo constitutivo adotado para o concreto na compressão foi adaptado de Elwi e Murray [3]. A relação tensão-deformação uniaxial é apresentada na FIGURA 1.

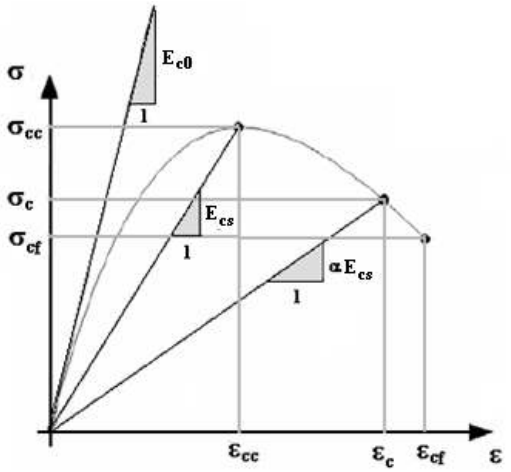

Figura 1 - Relação tensão-deformação no concreto para compressão.

No trecho ascendente da FIGURA 1, o material resiste plenamente às ações introduzidas no sistema e é considerado intacto e praticamente elástico. Já no trecho descendente, o material apresenta esmagamento parcial, em que o mesmo apresenta uma reserva de resistência, e o módulo de elasticidade é representado por seu valor secante. Atingida a deformação final , o material é considerado rompido por esmagamento, não havendo qualquer resistência em termos de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal incremental E_{cc} do concreto à compressão é definido por:

$$E_{cc} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_{c0}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{E_{c0}}{E_{cs}} - 2\right)\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^2\right)^2} \quad (1)$$

Onde E_{c0} é o módulo de elasticidade inicial do concreto, E_{cs} o módulo de elasticidade secante, a deformação de compressão no ponto crítico e a deformação equivalente de compressão.

2.2 Relação tensão-deformação uniaxial para tração

O modelo de dano proposto por Mazars [9] tem por base algumas evidências experimentais observadas em ensaios uniaxiais de corpo de prova em concreto, tendo por hipóteses fundamentais [11]:

- localmente o dano é devido a extensões (alongamentos) evidenciadas por sinais positivos, ao menos um deles, das componentes de deformação principal ($\varepsilon_i > 0$);
- o dano é representado por uma variável escalar $D \in [0,1]$, cuja evolução ocorre quando um valor de referência para a deformação equivalente é superado, conforme é mostrado esquematicamente na FIGURA 2;

- considera-se, portanto, que o dano seja isótropo, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo) e;
- o concreto danificado comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

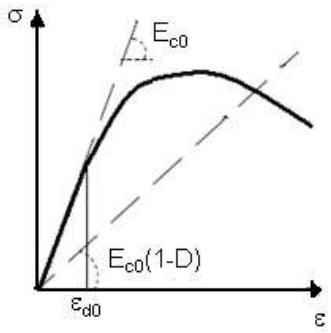

Figura 2 - Diagrama tensão deformação para o modelo de dano de Mazars [9].

A relação constitutiva, no caso particular de estado unidimensional de tensão, é dada por [13]:

$$\sigma(\tilde{\varepsilon}) = (1 - D)E_0\tilde{\varepsilon} \tag{2}$$

Onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial, ou seja, do material não danificado, e $\tilde{\varepsilon}$ é a deformação equivalente. A variável de dano D é dada por uma combinação linear das variáveis básicas de dano, D_T e D_C, através dos coeficientes de combinação, α_T e α_C:

$$D = \alpha_T D_T(\tilde{\varepsilon}) + \alpha_C D_c(\tilde{\varepsilon}), \quad \alpha_T + \alpha_C = 1 \tag{3}$$

As variáveis básicas de dano são dadas por:

$$D_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{(B_T\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \tag{4}$$

$$D_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{(B_C\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \tag{5}$$

Onde A_T, B_T, A_c e B_c são parâmetros característicos do material e ε_{d0} é a deformação equivalente abaixo da qual não ocorre dano. Assim, se $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_{d0}$ então $D = 0$. Os subindices T e C significam tração e compressão, respectivamente.

Para a modelagem proposta, considera-se a tração pura. Nesse caso, tem-se $\alpha_T = 1$ e $\alpha_C = 0$ na Equação (3). Portanto, a variável D_c é desprezada e $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_t$. O módulo de elasticidade do concreto à tração danificado é $E_{ct} = (1 - D_t)\, E_0$.

2.3 Cálculo da deformação uniaxial equivalente

A deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ é avaliada por [13]:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_t & \text{, se } \varepsilon_x \geq 0 \text{ (tração)} \\ -\nu\sqrt{2}\varepsilon_x = \varepsilon_c & \text{, se } \varepsilon_x < 0 \text{ (compressão)} \end{cases} \tag{6}$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson do concreto e ε_x é a deformação na direção *x*.

3. MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Neste artigo, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras, uma vez que, em estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem fundamentalmente a esforços axiais. No modelo computacional implementado, o aço é representado como um material elastoplástico e com o mesmo comportamento em tração e em compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear. Assim, a tensão no aço é determinada por [13]:

$$\sigma = \begin{cases} E_a \varepsilon_x & , se\ -\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_x \leq \varepsilon_{sy} \\ E_{at}\varepsilon_x & , caso\ contrário \end{cases} \tag{7}$$

Onde E_a é o módulo de elasticidade longitudinal inicial do aço, ε_{sy} é a extensão de cedência e $E_{at} = k_a\, E_a$ é o módulo de elasticidade longitudinal após a cedência do aço.

4. RIGIDEZ EQUIVALENTE

Para a determinação da rigidez à flexão equivalente para o concreto, a seção transversal da viga é dividida em *n* camadas, conforme é mostrado na FIGURA 3. O momento de inércia da camada *i* é calculado, através do teorema do eixo paralelo, da seguinte maneira:

$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1})\left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2}\right)^2, \quad i = 1, \cdots, n \tag{8}$$

Em que n é o número total de camadas, b a largura da seção transversal retangular e y_i é a coordenada da i-ésima camada a partir do centróide da seção. A rigidez à flexão equivalente para o concreto EI_{eqc} é calculada por:

$$EI_{eqc} = \Sigma_{i=1}^{n} E_{ci} I_i \tag{9}$$

Em que E_{ci} é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto da i-ésima camada. A rigidez à flexão equivalente para o aço EI_{eqa} é obtida por (FIGURA 4):

$$EI_{eqa} = \Sigma_{k=1}^{nb} E_{ak} \left(\frac{\pi \emptyset_k{}^4}{64} + \frac{\pi \emptyset_k{}^2}{4} y_{ai}{}^2 \right) \tag{10}$$

Em que nb é o número de barras; ϕ_k o diâmetro da barra k; E_{ak} é o módulo de elasticidade longitudinal do aço da barra k; y_{ai}, i = 1,2, é a distância do centróide da barra k ao centro da seção transversal da viga; e c é o cobrimento da armadura.

Assim, a rigidez à flexão equivalente total EI_{eq} é obtida, de maneira simplificada, pela soma das parcelas EI_{eqc} e EI_{eqa}:

$$EI_{eq} = EI_{eqc} + EI_{eqa} \tag{11}$$

Na obtenção do vetor de força interna elementar, a rigidez à flexão equivalente é determinada para cada ponto de Gauss na integração numérica, utilizando-se o método de Quadratura Gaussiana. No processo de cálculo da rigidez equivalente, supõe-se, por simplificação, que a linha neutra ($\sigma_x = 0$) está localizada no centróide da seção transversal; essa condição é verdadeira desde que haja simetria da armadura (armaduras longitudinais inferior e superior com mesma área e posicionadas simetricamente com relação ao centróide), e os materiais tenham comportamento elástico linear (lei de Hooke). No entanto, quando os materiais (concreto e/ou aço) apresentam comportamento não linear, a localização da linha neutra é alterada. Portanto, em uma análise não linear o posicionamento da linha neutra é alterado a cada iteração numérica.

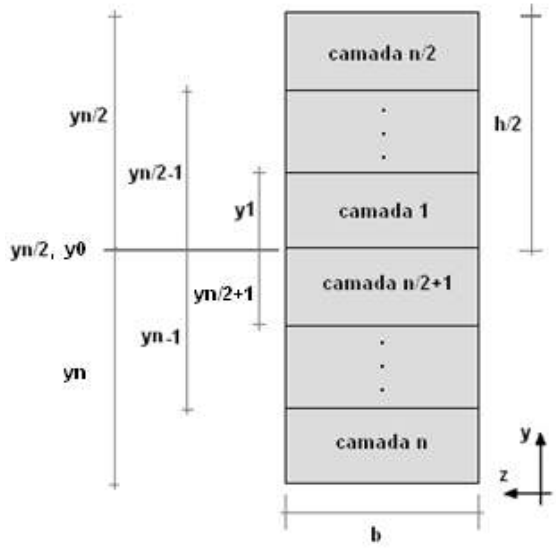

Figura 3 - Seção transversal retangular da viga dividida em *n* camadas.

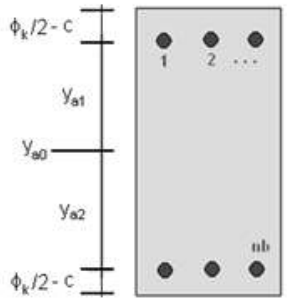

Figura 4 - Armadura longitudinal inferior e superior da viga.

5. MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

5.1 Método de comprimento de arco

O método de comprimento de arco caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de carga e deslocamento. Há duas incógnitas: o incremento do fator de carga $\Delta\varphi$ e o vetor de incremento de deslocamento $\boldsymbol{\Delta u}$. Em cada passo de solução, as trajetórias de iteração são perpendiculares aos arcos, que por sua vez podem ser aproximados por tangentes à trajetória de equilíbrio, nos pontos iniciais desses passos [12]. Considerando o método de arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson modificado, as equações de equilíbrio para i-ésima iteração podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{K_T}^{\alpha}\Delta u^i = \Delta\varphi^i \boldsymbol{R_0} + \Delta \boldsymbol{Q}^{i-1} \tag{12}$$

Onde $\Delta\varphi^i$ é o incremento do fator de carga da iteração *i*, Δu^i é o vetor incremento de

deslocamento, $\boldsymbol{R_0}$ é o vetor de cargas de referência, ${\boldsymbol{K_T}}^{a}$ é a matriz de rigidez tangente atualizada apenas no início de cada passo de carga e $\Delta \boldsymbol{Q}^{i-1}$ é o vetor de cargas não equilibradas dado por:

$$\Delta \boldsymbol{Q}^{i-1} = {\boldsymbol{R_{ext}}}^{i-1} - {\boldsymbol{F_{int}}}^{i} \tag{13}$$

Sendo ${\boldsymbol{R_{ext}}}^{i-1}$ o vetor das forças externas e ${\boldsymbol{F_{int}}}^{i}$ é o vetor de forças nodais internas. O vetor ${\boldsymbol{R_{ext}}}^{i-1}$ deve ser escrito em função do fator de carga φ^{i-1}, atualizado ao final da iteração anterior, e do vetor de cargas de referência $\boldsymbol{R_0}$, constante, através da seguinte relação:

$${\boldsymbol{R_{ext}}}^{i-1} = \varphi^{i-1}\boldsymbol{R_0} \tag{14}$$

Para um sistema de ordem *n+1*, equivalendo *n* ao número de graus de liberdade da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} {\boldsymbol{K_T}}^{a} & -\boldsymbol{R_0} \\ (\Delta \boldsymbol{u^1})^{\mathrm{T}} & \Delta\varphi^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{u}^i \\ \Delta\varphi^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{Q}^{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Onde $\Delta \boldsymbol{u^1}$ é o primeiro vetor de incrementos de deslocamento do passo de solução, e $\Delta\varphi^1$ o primeiro incremento do fator de carga no referido passo. Nota-se que a resolução do sistema dado pela Equação (15) gera um sistema de equações com solução não-trivial, mesmo que a matriz ${\boldsymbol{K_T}}^{a}$ seja singular.

Entretanto, há o problema da matriz de rigidez não ser simétrica. A fim de contornar este problema, Wessels [15] propôs uma alternativa que consistiu em dividir o vetor de incremento de deslocamentos $\Delta \boldsymbol{u}^i$ em duas parcelas: ${\Delta \boldsymbol{u}^i}_{Q}$ e ${\Delta \boldsymbol{u}^i}_{R}$. Essas parcelas são obtidas pela resolução do sistema:

$${\boldsymbol{K_T}}^{a}{\Delta \boldsymbol{u}^i}_{\mathrm{Q}} = \Delta \boldsymbol{Q}^{i-1} \tag{16}$$

$${\boldsymbol{K_T}}^{a}{\Delta \boldsymbol{u}^i}_{\mathrm{R}} = \mathrm{R_0} \tag{17}$$

O incremento do fator de carga é obtido por:

$$\Delta\varphi^i = -\frac{(\Delta \boldsymbol{u^1})^T {\Delta \boldsymbol{u}^i}_{Q}}{(\Delta \boldsymbol{u^1})^T {\Delta \boldsymbol{u}^i}_{\mathrm{R}} + \Delta\varphi^1} \tag{18}$$

5.2 Critérios de convergência

Com o objetivo de limitar os processos iterativos são estabelecidos dois critérios de convergência: um para deslocamentos e outro para forças.

O critério de convergência para deslocamentos deve obedecer a seguinte relação:

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{u}^i\|}{\left\|\sum_{j=1}^{i} \Delta \boldsymbol{u}^j\right\|} \leq u_{tol} \tag{19}$$

Onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento correspondente à iteração *i*, ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento acumulado, desde a primeira iteração até a i-ésima iteração.

O critério de convergência para forças deve obedecer a inequação dada por:

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{Q}^i\|}{\|\varphi^i \boldsymbol{R_0}\|} \leq Q_{tol} \tag{20}$$

Onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de carga não equilibrada correspondente à iteração *i*, ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de força do passo de solução.

6. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE TSAI E WU

O procedimento proposto por Tsai e Wu [14] foi o de aumentar o número de termos na equação do critério de falha de [6], com o objetivo de melhor aproximar os dados experimentais obtidos para os vários materiais. A falha de um determinado material é interpretada como a ocorrência de qualquer descontinuidade na resposta do material aos estímulos mecânicos [10]. Algumas das descontinuidades de interesse são: o início da não linearidade na relação tensão *versus* deformação, a ocorrência de deformações irreversíveis e a ruptura do material. Considerando-se materiais totalmente anisotrópicos, deve-se admitir que os modos de falha sejam condicionados tanto pelas tensões normais quanto pelas tangenciais, uma vez que as fraturas podem ocorrer em virtude de diferentes conjuntos de tensões que agem sobre o elemento. De forma geral, essa teoria pode ser apresentada por:

$$\sum_{i=1}^{6} F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} F_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \cdots = 1 \quad (21)$$

Os coeficientes F_i, F_{ij} e F_{ijk} são estruturas rearranjadas de tensores de 1ª, 2ª e 3ª ordem, respectivamente. Uma vantagem desse método é que existe liberdade para a utilização de tantos termos quantos forem necessários para a aproximação dos pontos experimentais de um material. No entanto, uma vez que cada constante está associada a um tipo distinto de ensaio mecânico para sua determinação, comumente a Equação (21) se restringe apenas aos termos de 2ª ordem. Caso isso não seja feito, a quantidade e a complexidade dos ensaios necessários para a determinação das constantes tornaria inviável o método.

Considerando o Estado Plano de Tensões aplicado a materiais ortotrópicos e desenvolvendo a Equação (21), obtem-se:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} {\sigma_1}^2 + F_{22} {\sigma_2}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{44} {\sigma_4}^2 = 1 \quad (22)$$

Onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais e σ_4 é a tensão de cisalhamento. A Equação (22) indica que o estado de tensões encontra-se num ponto crítico (no limite da falha). Contudo, se o estado de tensões dado pelo membro esquerdo da Equação (22) apresentar resultado numérico inferior a um, tem-se a situação de segurança. Diferentemente de outros critérios de resistência, esse leva em consideração o efeito das componentes hidrostáticas das tensões.

7. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Este exemplo, adaptado de [7], faz uma análise não linear unidimensional por elementos finitos de uma viga de concreto armado, considerando o modelo de dano proposto por Mazars [9] e o modelo adaptado de Elwi e Murray [3] para simular o concreto à tração e à compressão, respectivamente; e o modelo elastoplástico bilinear para o aço. A viga biapoiada tem 6 m de comprimento, seção transversal retangular de (20 x 40) cm^2, sujeita a uma força concentrada aplicada no meio do vão. As armaduras longitudinais inferiores (A_{st}) e superiores (A_{sc}) da mesma são constituídas por 3 ϕ12,5mm, com recobrimento de 0,02m.

Na discretização por elementos finitos, foram empregados 100 elementos de viga com 2 nós e 2 graus de liberdade/nó, fazendo-se o uso das simetrias de carregamento e geometria, analisando-se, portanto, apenas metade da viga (FIGURA 5). O incremento de

carga utilizado foi tomado igual a 0,5 kN. Os erros máximos admitidos no final de cada incremento foram de $u_{tol} = 10^{-3}$ e $Q_{tol} = 10^{-2}$.

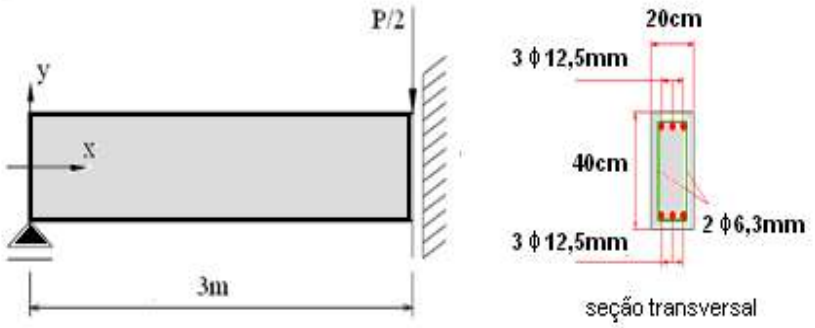

Figura 5 - Esquema estrutural e seção transversal da viga.

Para a determinação da rigidez à flexão equivalente para o concreto, a seção transversal da viga foi dividida em 60 camadas iguais. Na TABELA 1 são apresentados os parâmetros materiais e os coeficientes de resistência para o critério de Tsai e Wu [14].

Tabela 1 - Parâmetros materiais e os coeficientes de resistência para o critério de Tsai e Wu [14].

Símbolo	Parâmetro	Valor
E_{c0}	Módulo de elasticidade inicial do concreto	30,2 GPa
ν	Coeficiente de Poisson do concreto	0,2
A_T	Constante (modelo Mazars)	0,995
B_T	Constante (modelo Mazars)	2400
ε_{d0}	Deformação equivalente de referência	$2,0\ 10^{-5}$
E_a	Módulo de elasticidade inicial do aço	210 GPa
k_a	Constante modelo elastoplástico bilinear	1,0
ε_{cc}	Deformação de compressão no ponto crítico	$7,0\ 10^{-5}$
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante do concreto	0,85 E_{c0}
F_1	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	0,224
F_2	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	0,0
F_{11}	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	-0,0288
F_{22}	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	0,0
F_{44}	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	0,0305
F_{12}	Coeficiente (Tsai e Wu) [a]	$\pm$ 0,00385

[a] Parâmetros adotados conforme [4].

Considerando o caso uniaxial de tensão ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_4 \neq 0$ e $\sigma_2 = 0$), a Equação (22) é re-escrita da seguinte forma:

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1{}^2 + F_{44}\sigma_4{}^2 = 1 \quad (23)$$

Os resultados obtidos da simulação numérica com o modelo computacional implementado neste artigo são mostrados na FIGURA 6, bem como as curvas numéricas (obtidas com o programa Ansys) e experimental apresentadas em [7]. A viga falha, considerando o critério de falha de Tsai e Wu [14], para $R \cong 50{,}0$ kN ficando próxima à carga de ruptura experimental. No modelo computacional, considera-se que a peça falha no momento em que um dos elementos finitos da malha, em um dos pontos de Gauss, falha, ou seja, no momento em que $F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1{}^2 + F_{44}\sigma_4{}^2 > 1$ (resultado avaliado a partir da determinação das tensões máximas na seção transversal correspondente: $\sigma_1 = \sigma_x$ e $\sigma_4 = \sigma_x/2$).

Fazendo-se a análise dos resultados, vê-se que a curva deslocamento máximo *versus* carga ficou, em grande parte, abaixo da curva experimental, tanto na região linear quanto na não linear. Nota-se que há uma tendência de um comportamento linear, na relação carga-deslocamento, para valores de carga acima de 30 kN e se mantém até o processo de ruptura. O dano determinado nos pontos de Gauss surge no concreto à tração quando a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ atinge a deformação de referência ε_{d0}, ocasionando, assim, a diminuição da rigidez no ponto correspondente. Também se vê que, conforme a FIGURA 6, os deslocamentos obtidos do método proposto são próximos aos da análise experimental quando da aplicação de carga inferior a 30 kN; contudo os deslocamentos são maiores para cargas entre 30 e 45 kN. De acordo com os autores Guello e Bittencourt [5], simulações com o modelo de Mazars [9] podem conduzir a deformações excessivas na estrutura a partir de um determinado incremento de carga. Para limitar essas deformações esses autores sugerem limitar o valor do dano durante a análise, isto é, fazer $D_T < 1$. Contudo, tal restrição não foi considerada nas simulações efetuadas com o modelo proposto.

Verificam-se diferenças nas respostas obtidas a partir dos modelos tridimensionais (com armadura em chapa e dispersa) com o auxílio do *software* Ansys e o implementado neste artigo. Essas diferenças podem ser explicadas por alguns fatores como, por exemplo: o modelo implementado neste artigo é unidimensional e adota uma relação constitutiva para o concreto diversa; e o critério de parada adotado nos modelos tridimensionais, segundo os autores em [7], limitou o carregamento aplicado e o deslocamento, mas não limitou as deformações.

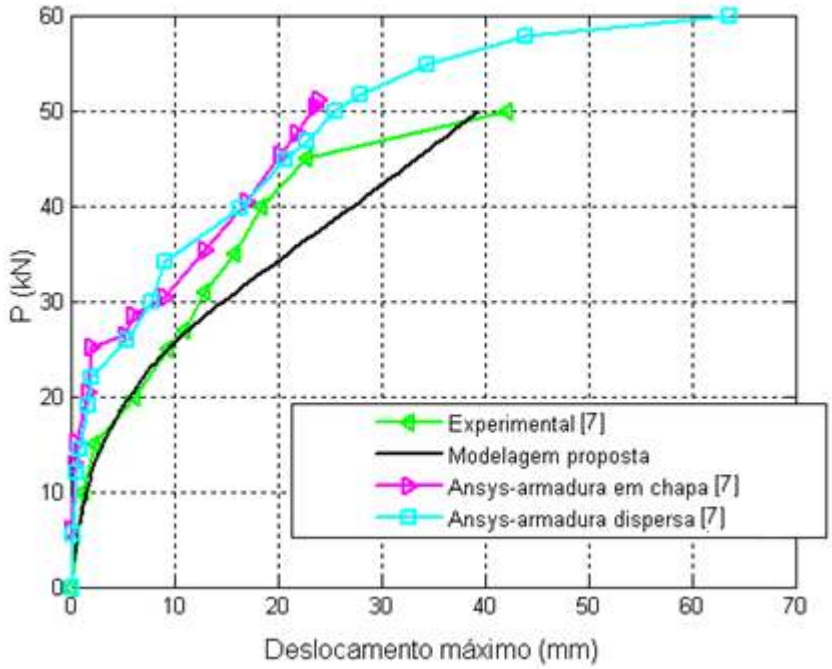

Figura 6 - Curva deslocamento máximo *versus* incremento de carga.

Nas FIGURAS 7 e 8 são apresentadas as curvas deformação *versus* tensão para o concreto à compressão e à tração, respectivamente, segundo os modelos constitutivos implementados computacionalmente, referente à seção transversal situada aproximadamente no meio do vão.

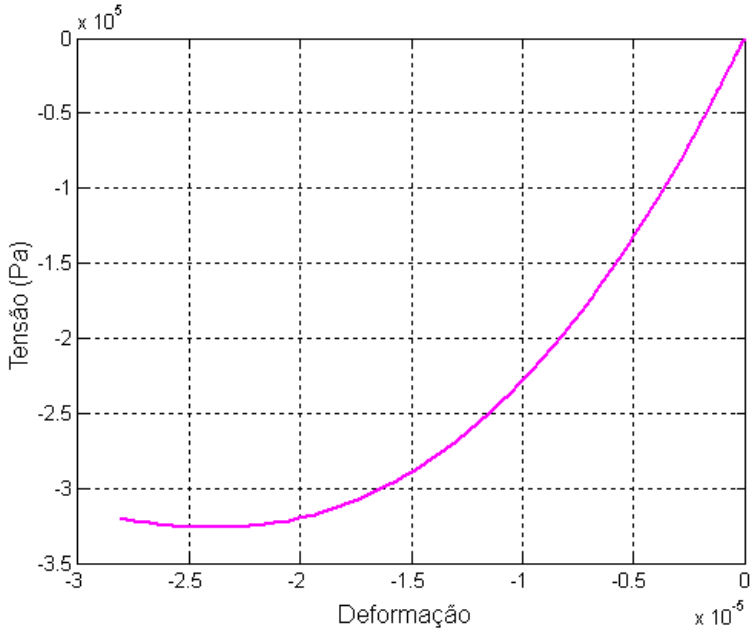

Figura 7 - Curva deformação *versus* tensão predita na simulação numérica segundo o modelo proposto por Elwi e Murray [3], referente à parte superior da seção transversal da viga localizada aproximadamente no meio do vão.

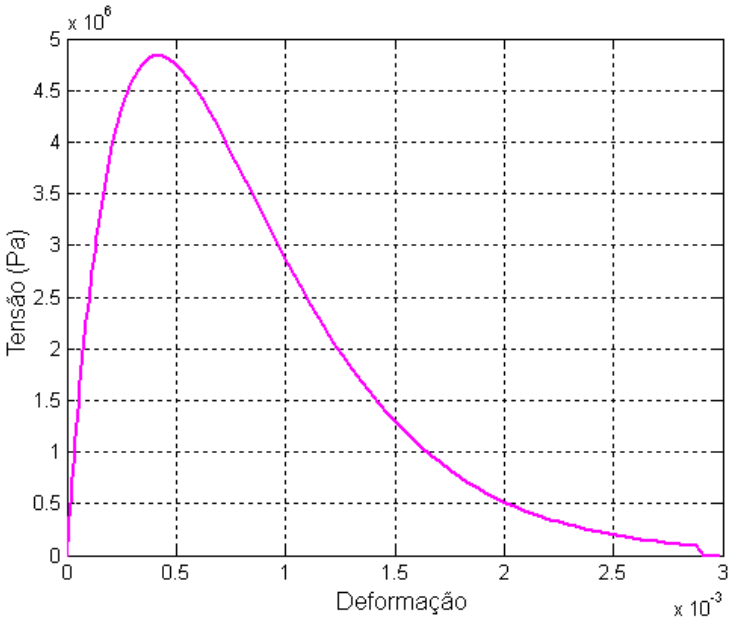

Figura 8 - Curva deformação *versus* tensão predita na simulação numérica segundo o modelo de Mazars [9], referente à parte inferior da seção transversal da viga localizada aproximadamente no meio do vão.

A escolha do método de Newton-Raphson combinado com a técnica de comprimento de arco para a resolução de problemas não lineares, em particular na determinação do estado de deformação e da rigidez associada a cada uma das seções, é adequada, porque permite descrever os efeitos de *softening* (redução das tensões com o acréscimo das deformações), como são mostrados nas FIGURAS 7 e 8.

8. CONCLUSÃO

A análise tradicional de estruturas de concreto se baseia em ensaios de estruturas ou de peças estruturais em laboratório. Os resultados obtidos a partir desses ensaios são limitados e, às vezes, de difícil interpretação. Dessa forma, o desenvolvimento de modelos numérico-matemáticos se faz necessário para complementar a análise experimental e possibilitar a generalização dos resultados para diferentes estruturas e formas de carregamento.

Pode-se concluir, pelo exemplo unidimensional apresentado, a validade do emprego da modelagem proposta, em conjunto com método de Newton-Raphson combinado com a técnica de comprimento de arco na resolução do sistema de equações não lineares, na simulação do comportamento de estruturas lineares em concreto armado.

No que se refere ao estudo de estruturas de concreto armado, verifica-se que a análise com modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo constitui uma

válida alternativa para o estudo do comportamento estrutural. Contudo, no sentido de melhor reproduzir a realidade física, é indispensável considerar os fenômenos de interação entre o concreto e a armadura (como a perda de aderência).

Ademais, como continuidade dessa pesquisa, pretende-se, além das sugestões anteriores, implementar novos modelos constitutivos de dano para simular o concreto e outros critérios de falha, como o de Willian-Warke, em estruturas de concreto armado bi-dimensionais e tridimensionais, possibilitando análises mecânicas mais realísticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Sarlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, 1993.

[2] AURICH, M. **Simulação computacional do comportamento do concreto nas primeiras idades**. Tese (Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

[3] ELWI, A. E.; MURRAY, D. W. Nonlinear analysis of axisymmetric reinforced concrete estructures. **Structural Engineering Report**, Univ. of Alberta, Canada, n. 87, 1980.

[4] GAGLIARDO, D. P; GAGLIARDO, J. C.; MASCIA, N. T. Comparação entre os critérios de Rankine e de Tsai Wu para uma viga de concreto reforçado com fibras. In: **Congresso Brasileiro do Concreto, 53º**, **Anais.** Florianópolis: IBRACON, 2011.

[5] GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N. Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por meio da Mecânica do Dano. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**, v. 0202, n. 1, p. 1-12, 2002.

[6] HILL, R. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. In: **Proceedings of the Royal Society of London**, Series A, v. 193, p. 281-297, London, 1948.

[7] JAREK, A.; MARCONCIN, L. R.; SOUZA, L. A. F.; MACHADO, R. D.; LACERDA, L. A. Numerical modeling combined with experimental analysis of simply supported reinforced concrete beam monitored with fiber optic sensors. In: **Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, XXXII, Anais.** Ouro Preto: CILAMCE, 2011.

[8] LEONEL, E. D.; RIBEIRO, G. O.; PAULA, F. A. Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado por Meio do MEF/ANSYS. In: **Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, V, Anais.** São Paulo: EPUSP, 2003.

[9] MAZARS, J. **Aplication de la mécanique de l'endommagement au comportament non lineare et à la rupture du béton de structure**. Thése de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.

[10] NICOLAS, E. A.; MASCIA, N. T.; TODESCHINI, R. Ensaios uniaxiais e biaxiais para avaliação de critério de resistência (Tsai-Wu) de materiais anisotrópicos para a madeira. **Minerva**, 6, v. 2, p. 107-116, 2006.

[11] PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

[12] RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: **Euro-US-Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, Berlin, 1981, Ruhr Universitat Bochum, Springer, p. 68-89.

[13] TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M. A.; ROSCA, V. Análise de problemas unidimensionais de mecânica do dano com funções de base radial. **Métodos Numéricos en Ingeniería**, V, Artes Gráficas Torres S. A., 2002.

[14] TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, v. 5, n. 1, p. 58-80, 1971.

[15] WESSELS, M. **Das Statische und Dynamishe Durchschlagsproblem der Imperfektem Flachen Kugelchale bei Elasticher Rotatiossymmetrischer Verformumg**. Dissertation, T.U. Hannover, Mitteil, n. 23 des Imstituts für Statik, 1977.