MAPLET PROGRAMADA VIA MAPLE: SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM PVI UTILIZANDO OS MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO EXPLÍCITOS

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO[1], OILSON ALBERTO GONZATTO JUNIOR[2], TEREZA MARIA PEREIRA GARCIA[3], LILIANA MADALENA GRAMANI[4], ELOY KAVISKI[5]

RESUMO

Este artigo objetiva divulgar uma *Maplet* programada via *Maple 16* para resolver um Problema de Valor Inicial composto por uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem utilizando os Métodos Lineares de Passo Múltiplo Explícitos. Para isso, apresentou-se o conceito de um PVI e alguns teoremas que garantem a existência e unicidade de sua solução, os métodos numéricos utilizados para obtenção desta solução foram descritos detalhadamente e implementados na *Maplet*.

PALAVRAS-CHAVES: Equações Diferenciais. *Maplet.* Solução Numérica.

MAPLETS PROGRAMMED BY WAY OF MAPLE: IVP NUMERICAL SOLUTION USING EXPLICIT LINEAR METHODS OF MULTIPLE STEP

ABSTRACT

This article aims to disseminate a Maplet programmed by way of Maple 16 to solve a problem consisting of an Initial Value Ordinary Differential Equation of First Order Methods using Multiple Linear Step Explicit. For this, presented the concept of an IVP and some theorems that guarantee the existence and uniqueness of its solution, the numerical methods used to obtain this solution were described in detail and implemented in the Maplet.

KEYWORDS*:* Differential Equations. Maplet .Numeric Solution.

1. INTRODUÇÃO

As palavras equações e diferenciais indicam algum tipo de equação que envolve derivadas. As equações que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente são chamadas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

Grande parte dos modelos que descrevem o mundo em que vivemos se apropria da teoria destas equações, e estes modelos estão presentes em todas as ciências que se interessam

[1]UTFPR, alobeiro@utfpr.edu.br
[2]COINF- -CM, oilson.agjr@hotmail.com
[3]COINF-UTFPR-CM, tesimary@hotmail.com
[4]DMAT-UFPR, gramani@mat.ufpr.br
[5]DHS-UFPR, eloy.dhs@ufpr.br

em entender o mundo natural [1]. A maioria desses problemas requer a solução de um problema de valor inicial, isto é, resolver uma equação diferencial que satisfaça uma dada condição inicial.

Na maioria das situações da vida real, a equação diferencial que modela o problema é muito complicada para ser resolvida com exatidão. Sendo assim, recorre-se a dois procedimentos para aproximar a solução. O primeiro consiste em simplificar a equação diferencial de modo a resolvê-la exatamente, e, então usar a solução da equação simplificada para aproximá-la da solução da equação original. O segundo se vale de métodos para aproximar a solução do problema original. Esse procedimento é mais comumente empregado, uma vez que os métodos de aproximação dão resultados mais precisos e uma informação mais realista sobre o erro [2].

Por estes e outros motivos as disciplinas de Equações Diferenciais (EDs) e Cálculo Numérico se fazem presentes no contexto acadêmico, em especial para os cursos de Engenharia, pois, elas constituem uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas práticos.

Neste contexto o aprendizado torna-se essencial e, alguns meios para torná-lo menos dispendioso são, hoje, acessíveis. Inúmeros são os elementos trazidos pela presença da tecnologia nos ambientes de ensino, os debates acerca de sua inserção se intensificam e trazem respostas, alternativas de utilização e novas dúvidas. A renovação da prática docente e a instituição de novos objetivos e funções da educação escolar, inegavelmente, incluem tal consideração. Não é mais possível ignorar que sua utilização tem alterado profundamente as abordagens de ensino, a dinâmica das aulas e as formas de pensar. O aproveitamento das possibilidades de exploração e experimentação que os sistemas tecnológicos oferecem, possibilitam aos alunos e professores vivenciarem ambientes de aprendizagem extremamente favoráveis à construção ou reconstrução do conhecimento [3].

A busca em torno de *softwares* matemáticos que viabilizem o desenvolvimento educacional é mitigada pela presença do *Maple*, um poderoso programa computacional, designado para executar uma variedade de cálculos matemáticos e operações cujas entradas numéricas são operadas de maneira simbólica. O *software* dispõe de sua própria linguagem de programação, uma linguagem de alto nível, bem estruturada, e compreensível. Ela suporta uma ampla coleção de estruturas de dados ou *objetos Maple*, como funções, sequências, conjuntos, listas, vetores, tabelas, matrizes, etc. A biblioteca do *Maple* pode ser localmente complementada por programas e pacotes criados por usuários desenvolvedores [4]. Um campo a ser considerado neste contexto é a construção de *Maplets*.

Maplet é uma interface gráfica destinada a usuários finais, composta por janelas, caixas de entrada, botões e uma gama de subterfúgios que tornam intuitiva a utilização dos comandos inerentes ao *software*, pois, ocorre por meio de cliques [5].

Baseado nesta ideia, uma *Maplet* foi programada, no intuito de abordar os Métodos Lineares de Passo Múltiplo, utilizados para obter a solução numérica de um PVI e tornar seu entendimento mais acessível aos estudantes e pesquisadores.

A estrutura deste artigo está organizada nas seguintes seções:

- Conceitos Preliminares: Nesta seção apresentam-se os conceitos de EDO e PVI. Descreve-se também, as condições para obter uma única solução de um PVI não num intervalo contínuo, mas sim num conjunto discreto de pontos.
- Métodos Lineares de Passo Múltiplo: Nesta seção apresentam-se alguns Métodos Lineares de Passo Múltiplo.
- Apresentação da *Maplet*: Nesta seção apresenta-se a interface gráfica e as funcionalidade da *Maplet* programada para aplicação dos Métodos Lineares de Passo Múltiplo.
- Aplicação da *Maplet* para resolução de um PVI: Nesta seção utiliza-se a *Maplet* para resolver um dado PVI aplicando todos os Métodos de Passo Múltiplo descritos.
- Conclusão: Nesta seção algumas considerações são apresentadas a respeito da utilização da *Maplet*.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

A equação

$$y' = f(x; y), \tag{1}$$

é chamada EDO de Primeira Ordem. Nesta equação, f é uma função real dada, de duas variáveis reais x e y, onde y depende da variável independente x.

Resolver a Equação (1) corresponde em determinar uma função $y = y(x)$, diferenciável, com $x \in [a; b]$ tal que $y'(x) = f(x; y(x))$. Qualquer função que satisfaça essa propriedade é uma solução da equação diferencial (1). Por exemplo, a função $y(x) = Ce^x$ é, para qualquer valor da constante C, uma solução da equação diferencial $y' = y$. Assim, cada EDO de primeira ordem possui um número infinito de soluções. Contudo, pode-se obter uma solução particular, se junto com a equação diferencial for dado o valor de $y(x)$ em um ponto, por exemplo, $y(x_0) = y_0$, a qual é chamada de condição inicial [6].

A equação diferencial juntamente com a condição inicial constituem um Problema de Valor Inicial (PVI), isto é,

$$\begin{cases} y' &= f(x; y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}. \tag{2}$$

Deseja-se obter condições que garantam a existência de uma única solução do PVI (15).

Definição 2.1. *Diz-se que uma função $f(x;y)$ satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se uma constante $L > 0$ existe com*

$$|f(x;y_1) - f(x;y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \cdot \qquad ((3)$$

sempre que $(x;y_1) \leq (x,y_2) \in D$. A constante L é chamada de constante de Lipschitz para f [2].

Definição 2.2. *Diz-se que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é convexo se, sempre que $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ pertençam a D, e λ esteja em $[0,1]$, o ponto $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2;\ (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ também pertença a D.*

Em termos geométricos a Definição 2.2 estabelece que um conjunto é convexo sempre que, quando dois pontos pertencem a um conjunto, todo o segmento de reta entre os pontos também pertence ao conjunto. Os conjuntos considerados nesse trabalho são da forma $D = \{(x;y)$ tal que $a \leq x \leq b$ e $-\infty < y < \infty\}$ para algumas constantes a e b [2].

Teorema 2.1. *Suponha que $f(x;y)$ seja definida em um conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Se existe uma constante $L > 0$ com*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x;y)\right| \leq L, \qquad para\ todo\ \ (x;y) \in D \qquad ((4)$$

então f satisfaz uma condição de Lipschitz em D na variável y com a constante L de Lipschitz.

O Teorema 2.1 fornece condições apenas suficientes para que uma condição de Lipschitz seja válida.

Teorema 2.2. *Suponha que $D = \{(x;y)$ tal que $a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ e que $f(x;y)$ seja contínua em D. Se f satisfaz a condição de Lipschitz em D na variável y, então o problema de valor inicial*

$$y'(x) = f(x;y) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \cdot \qquad ((5)$$

tem uma única solução $y(x)$ para $a \leq x \leq b$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7].

O Teorema 2.2 garante a existência de uma única solução do PVI dado por (2). Porém, a grande maioria das equações encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente.

O recurso de que se dispõe para obter a solução do PVI dado por (2) é o emprego de métodos numéricos. Para isso, considera-se a sequência de pontos $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = x_0 + nh, \qquad ((6)$$

onde $n = 0, 1, \ldots, N$, com $x_0 = a$, $x_N = b$ e $N = (b-a)/h$. O comprimento do intervalo, h, é o *tamanho do passo*, os pontos x_n são os *pontos da malha* e N é o *número de passos*.

Uma propriedade importante dos métodos computacionais para a solução de (2) é a *discretização*, isto é, deseja-se obter a solução aproximada do PVI não num intervalo contínuo $a \leq x \leq b$, mas sim num conjunto discreto de pontos $\{x_n; n = 0, 1, \dots, N\}$.

Denota-se por y_n uma aproximação para a solução analítica em x_n, isto é, $y_n \cong y(x_n)$ e por $f_n = f(x_n; y_n)$. O objetivo é então determinar aproximações y_n da solução verdadeira $y(x_n)$ nos pontos da malha, sendo a solução numérica uma tabela de valores de pares $(x_n; y_n)$ [6].

3. MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO

Nessa seção apresenta-se os *Métodos Lineares de Passo Múltiplo* ou *Método de k-passos*, para resolver o PVI (2).

Definição 3.1. *Um Método Linear de Passo Múltiplo é definido pela seguinte relação*

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}\,, \tag{7}$$

onde α_j e β_j são constantes arbitrárias independentes de n, com $\alpha_k \neq 0$, h o tamanho do passo, α_0 e β_0 não ambos nulos [6].

Seja $\alpha_k = 1$, o método (15) é *explícito* se $\beta_k = 0$ e *implícito* se $\beta_k \neq 0$. Neste artigo, apresenta-se alguns métodos explícitos.

3.1. Método de Euler

O método mais simples de Passo Múltiplo, ou ainda, *método explícito de 1-passo*, onde $k = 1$ é obtido considerando $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = 0$ em (15), ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{1} \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^{1} \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \quad (-1)y_n + (1)y_{n+1} &= h[(1)f_{n+0} + (0)f_{n+1}] \\ \Rightarrow \quad y_{n+1} &= y_n + hf_n \end{aligned}\,, \tag{8}$$

Esse método é chamado *Método de Euler*.

3.2. Método da Regra do Ponto Médio

Considerando $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 0$ e $k = 2$ em (15), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \quad (-1)y_n + (0)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h[(0)f_{n+0} + (2)f_{n+1} + (0)f_{n+2}] \\ \Rightarrow \quad y_{n+2} &= y_n + 2hf_{n+1} \end{aligned}, \tag{9}$$

que é chamado *Método da Regra do Ponto Médio*, que é um método explícito de 2-passos.

3.3. Método de Adams-Bashforth

Considerando $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = -1/2$, $\beta_1 = 3/2$, $\beta_2 = 0$ e $k = 2$ em (15), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} &= h \sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{n+j} \\ \Rightarrow \quad (0)y_n + (-1)y_{n+1} + (1)y_{n+2} &= h\left[\left(-\frac{1}{2}\right) f_{n+0} + \left(\frac{3}{2}\right) f_{n+1} + (0)f_{n+2}\right], \\ \Rightarrow \quad y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}] \end{aligned} \tag{10}$$

que é chamado *Método de Adams-Bashforth*. Esse é um método explícito de 2-passos.

3.4. Métodos de Runge-Kutta

Muitas vezes deseja-se resolver o PVI dado por (2) usando um Método de k-passos, onde $k > 1$. É necessário então obter os valores iniciais necessários, para se utilizar tal método, que seja o mais preciso possível. Isto pode ser feito por meio do Método de Runge-Kutta, descrito nesta seção, que é um método explícito de 1-passo [6].

Definição 3.2. *Um Método Geral Explícito de* 1*-passo é definido pela relação*

$$y_{n+1} - y_n = \phi(x_n; y_n; h), \tag{11}$$

onde ϕ *é uma função que depende de* x_n,y_n *e* h.

Definição 3.3. (Ordem). *O método (15) é de ordem* q*, se* q *é o maior inteiro tal que*

$$y(x + \square) - y(x) - h\phi(x; y(x); \square) = O\left(\square^{q+1}\right), \tag{12}$$

onde $y(x)$ *é a solução exata do PVI dado por (2).*

Definição 3.4. *O Método Geral de Runge-Kutta de* R *estágios é definido por*

$$y_{n+1} - y_n = \square\phi(x_n; y_n; \square), \tag{13}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(x;y;\square) &= \sum_{r=1}^{R} c_r k_r \\ k_1 &= f(x;y) \\ k_r &= f\left(x + a_r h; y + \square \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right); r = 2,3,\dots,R \end{aligned} \quad . \tag{14}$$

Para se obter Métodos de Runge-Kutta deve-se determinar as constantes c_r, a_r e b_{rs} da Definição 3.4. Determina-se estas constantes comparando a expansão da função $\phi(x;y;\square)$, definida por (14), em potências de $\square$, com a função $\phi_T(x;y;h)$ desenvolvida através da expansão em série de Taylor [8], no sentido de se obter métodos de determinada ordem.

3.4.1. Métodos de Runge-Kutta de ordem dois

De início obtém-se métodos de Runge-Kutta de dois estágios. Para isso, considera-se $R = 2$ na Definição 3.4, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi(x;y;h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ k_1 &= f(x;y) \\ k_2 &= f(x + a_2 h; y + h a_2 f) \\ \square_2 &= \square_{21} \end{aligned} \quad . \tag{15}$$

Desenvolvendo k_2 em série de Taylor em torno do ponto $(x;y)$, obtém-se

$$\begin{aligned} k_2 = f(x;y) + a_2 f_x(x;y) + (h a_2 f) f_y(x;y) + \frac{(a_2 h)^2}{2!} f_{xx}(x;y) \\ + (a_2 h)(h a_2 f) f_{xy}(x;y) + \frac{(h a_2 f)^2}{2!} f_{yy}(x;y) + O(h^3)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

e substituindo em (*15)*, tem-se

$$\begin{aligned} \phi(x;y;h) = (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h\left(f_x + f_y\right) + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 \left[f_{xx} + 2 f f_{xy} + f_{yy} f^2\right] \\ + O(h^3), \end{aligned} \tag{17}$$

Agrupando os termos de mesma potência de h e denotando por

$$F = f_x + f_y f \qquad e \qquad G = f_{xx} + 2 f f_{xy} + f_{yy} f^2\,, \tag{18}$$

tem-se

$$\phi(x;y;h) = (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h F + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 G + O(h^3). \tag{19}$$

Agora expandindo a função $\phi_T(x;y;h)$ em série de Taylor, tem-se

$$\phi_T(x;y;h) = f + \frac{h}{2!}\left(f_x + f_y\right) + \frac{h^2}{3!}\left(f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f\right) + O(h^3). \tag{20}$$

Agrupando os termos semelhantes e usando (18), obtém-se

$$\phi_T(x;y;h) = f + \frac{h}{2!}F + \frac{h^2}{3!}\left[G + f_y F\right] + O(h^3). \tag{21}$$

Para determinar um método de dois estágios e ordem máxima, compara-se (19) com (21). Em particular, impondo a igualdade até termos de $O(h^2)$, tem-se

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_2 a_2 &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Resolvendo esse sistema obtém-se Métodos de Runge-Kutta de ordem dois. Além disso, como o sistema (22) possui duas equações e três incógnitas, este possui infinitas soluções e portanto pode-se afirmar que existem infinitos Métodos de Runge-Kutta de dois estágios e ordem dois.

Observe que para se obter um Método de Runge-Kutta de dois estágios e ordem três, é necessário que além de (22) tenha-se

$$\left(\frac{a_2^2 c_2}{2} - \frac{1}{6}\right) G = \frac{1}{6} f_y F\,. \tag{23}$$

A igualdade acima só pode ser satisfeita impondo severas condições sobre a função f, e portanto não existem Métodos de Runge-Kutta de dois estágios e ordem três [6].

Atribuindo um valor para uma das constantes em (22), obtém-se as outras duas, em função desta. Os Métodos de Runge-Kutta de dois estágios e ordem dois, mais usados são os Métodos de Euler Modificado e Euler Melhorado conforme descritos a seguir.

- **Método de Euler Modificado:** Considerando $c_1 = 0$ em (22) tem-se $c_2 = 1$ e $a_2 = 1/2$, portanto de (*15)*, segue que

$$y_{n+1} = y_n + hk_2\,, \tag{24}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \end{aligned} \tag{25}$$

que é conhecido como Método de Euler Modificado. Observe que apesar de k_1 não aparecer explicitamente, ele deve ser calculado a cada passo.

- **Método de Euler Melhorado:** Analogamente, considerando $c_1 = 1/2$ tem-se $c_2 = 1/2$ e $a_2 = 1$, portanto

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\,, \tag{26}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h; y_n + hk_1)\,, \end{aligned} \tag{27}$$

que é conhecido como Método de Euler Melhorado.

3.4.2. Métodos de Runge-Kutta de ordem três

Para obter Métodos de Runge-Kutta de três estágios, deve-se além do que já foi feito anteriormente, desenvolver também k_3 em série de Taylor, pois os Métodos de Runge-Kutta de três estágios são obtidos a partir de

$$y_{n+1} = n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3), \tag{28}$$

onde, k_1 e k_2 possuem as mesmas expressões do método de dois estágios e,

$$k_3 = f(x + ha_3; y + h(a_3 - b_{32})k_1 + b_{32}k_2), \tag{29}$$

desde que $a_3 = b_{31} + b_{32}$. Deve-se então agrupar os termos semelhantes e compará-los com a $\phi_T(x; y; h)$ para se obter Métodos de Runge-Kutta de três estágios até $O(h^3)$. Assim

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_2a_2 + c_3a_3 &= \frac{1}{2} \\ c_3b_{32}a_2 &= \frac{1}{6} \\ \square_2\square_2^2 + \square_3\square_3^2 &= \frac{1}{3} \end{cases}, \tag{30}$$

que é um sistema de quatro equações e seis incógnitas. Atribuindo valores a duas das variáveis obtém-se as outras quatro em função destas. Novamente tem-se infinitos Métodos de Runge-Kutta de três estágios e ordem três, dentre eles destacam-se os Métodos de Heun e Nystrom.

- **Método de Heun:** Considerando $c_1 = 1/4$ e $c_2 = 0$ em (30), obtém-se $c_3 = 3/4$, $a_3 = 2/3$ e a_2 qualquer. Escolhendo $a_2 = 1/3$ tem-se $b_{32} = 2/3$. Portanto

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \tag{31}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h; y_n + \frac{1}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right) \end{aligned} \tag{32}$$

que é conhecido como Método de Heun.

- **Método de Nystrom:** Escolhendo $c_2 = c_3$ e $a_2 = a_3$ e substituindo na segunda e quarta equações de (30), tem-se

$$\begin{cases} c_3a_3 &= \frac{1}{4} \\ c_3a_3^2 &= \frac{1}{6} \end{cases}. \tag{33}$$

Resolvendo (33) obtém-se $a_3 = 2/3 = a_2$ e $c_3 = 3/8 = c_2$. Substituindo esses valores em (30) tem-se $c_1 = 1/4$ e $b_{32} = 2/3$ [6]. Logo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left[k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3)\right], \tag{34}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h; y_n + \frac{2}{3}hk_2\right) \end{aligned} \tag{35}$$

que é conhecido como Método de Nystrom.

3.4.3. Métodos de Runge-Kutta de ordem quatro

Neste caso, a comparação de ϕ com ϕ_T, para se obter Métodos de Runge-Kutta de quatro estágios e ordem máxima, fornece um sistema de 11 equações e 13 incógnitas. Cada solução desse sistema define um Método de Runge-Kutta com ordem quatro. Portanto existem infinitos Métodos de Runge-Kutta de quatro estágios e ordem quatro [6].

Os dois métodos mais utilizados de Runge-Kutta de quatro estágios e ordem quatro são dados por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{h}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4] \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4] \end{aligned}, \tag{36}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ \square_3 &= \square\left(\square_\square + \frac{1}{2}\square; \square_\square + \frac{1}{2}\square\square_2\right), \\ \square_4 &= \square(\square_\square + \square; \square_\square + \square\square_3) \end{aligned} \tag{37}$$

e

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{h}{8}[k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4] \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{8}[k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4] \end{aligned}, \tag{38}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n; y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{3}h; y_n + \frac{1}{3}hk_1\right) \\ \square_3 &= \square\left(\square_\square + \frac{2}{3}\square; \square_\square - \frac{1}{3}\square(\square_1 + \square_2)\right). \\ \square_4 &= \square\big(\square_\square + \square; \square_\square + \square(\square_1 - \square_2 + \square_3)\big) \end{aligned} \tag{39}$$

Neste artigo utiliza-se o método dado por (*38)*.

Pelo que foi observado a impressão é que se pode obter sempre Métodos de Runge-Kutta de R estágios e ordem R. Entretanto, \cite{Butcher}, provou a não existência de Métodos de Runge-Kutta de cinco estágios e ordem cinco. Na prática os métodos de Runge-Kutta mais utilizados são os de ordem quatro.

4. APRESENTAÇÃO DA *MAPLET*

Na Figura 1, pode ser vista a interface gráfica da *Maplet* desenvolvida e, a seguir, destacam-se algumas das funcionalidades do software.

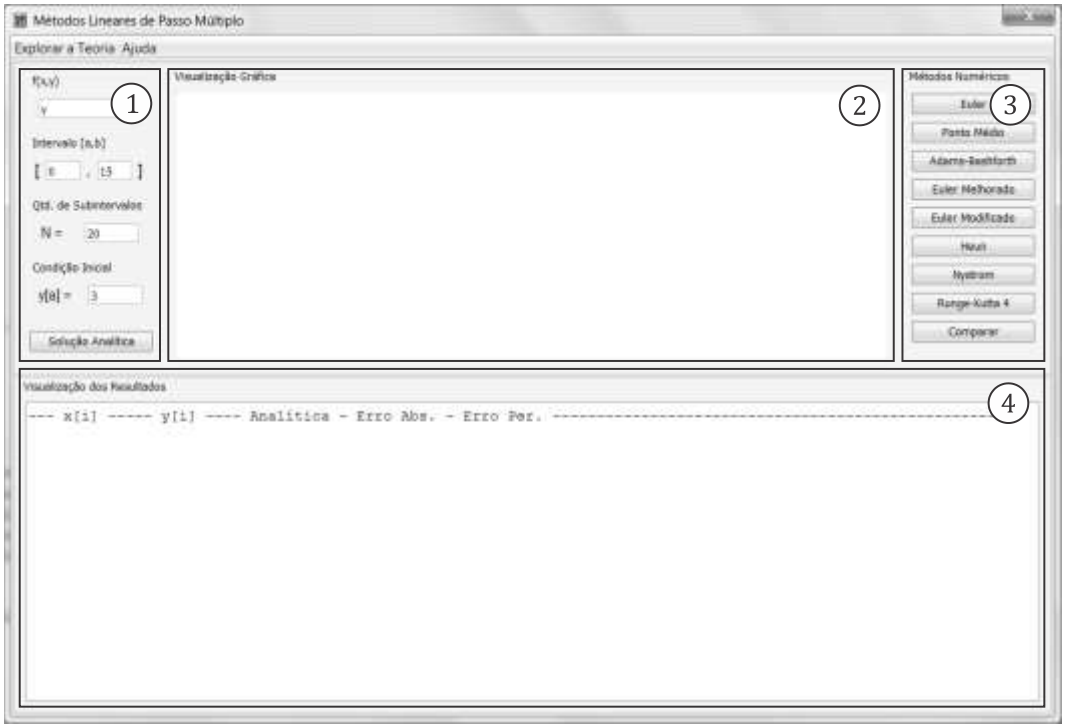

Figura 1. Tela inicial da Maplet “Métodos Lineares de Passo Múltiplo”.

1. Nesta área, podem ser vistos os campos de entrada, com os lugares onde deverão ser preenchidos:
   - a função $f(x; y)$;
   - os valores mínimo e máximo para a variável independente, x;
   - a quantidade de subintervalos, ou passos que serão dados dentro do intervalo $[a, b]$;
   - a condição inicial para a resolução de um dado PVI, $y(a) = \alpha$;
   - o botão para a visualização do gráfico e campo de direção da solução analítica, se existir.

2. Nesta área podem-se ver os gráficos obtidos por qualquer um dos métodos implementados além de, ao final, visualizar a comparação entre os resultados gráficos advindos de todos os métodos.
3. Nesta área estão disponíveis para o usuário, botões com cada um dos métodos numéricos implementados: Euler, Regra do Ponto Médio, Adams-Bashforth, Euler Melhorado, Euler Modificado, Heun, Nystrom e Runge-Kutta quatro.
4. Nesta área pode-se observar os resultados numéricos obtidos pela resolução, existe também a possibilidade de visualizar a comparação entre os resultados individuais de cada método, além da comparação entre os resultados analíticos, quando existirem, e numéricos, neste caso, pode-se analisar os valores obtidos para os erros absoluto e relativo.

5. APLICAÇÃO DA *MAPLET* PARA A RESOLUÇÃO DE UM PVI

Na Seção 3 os *Métodos Lineares de Passo Múltiplo* foram abordados e, na Seção 4 as funcionalidades gerais da *Maplet* programada foram apresentadas. Nesta seção, a título de exemplo, utiliza-se a *Maplet* para a resolução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3 \end{cases}. \tag{40}$$

Este PVI será resolvido utilizando os métodos descritos e comparando-os, a Figura 2 apresenta a resolução do problema pelo Método de Runge-Kutta de Ordem quatro e, nela pode ser vista a comparação feita entre os resultados analíticos e numéricos obtidos para este problema.

Adiante, na Figura 3, pode ser vista a comparação entre todos os métodos implementados no mesmo sistema de coordenadas, na tabela abaixo do gráfico há os valores numéricos para cada método, é possível, portanto, observar que a melhor aproximação para este caso, foi a descrita pelo Método de Runge-Kutta de Ordem quatro dado por (36).

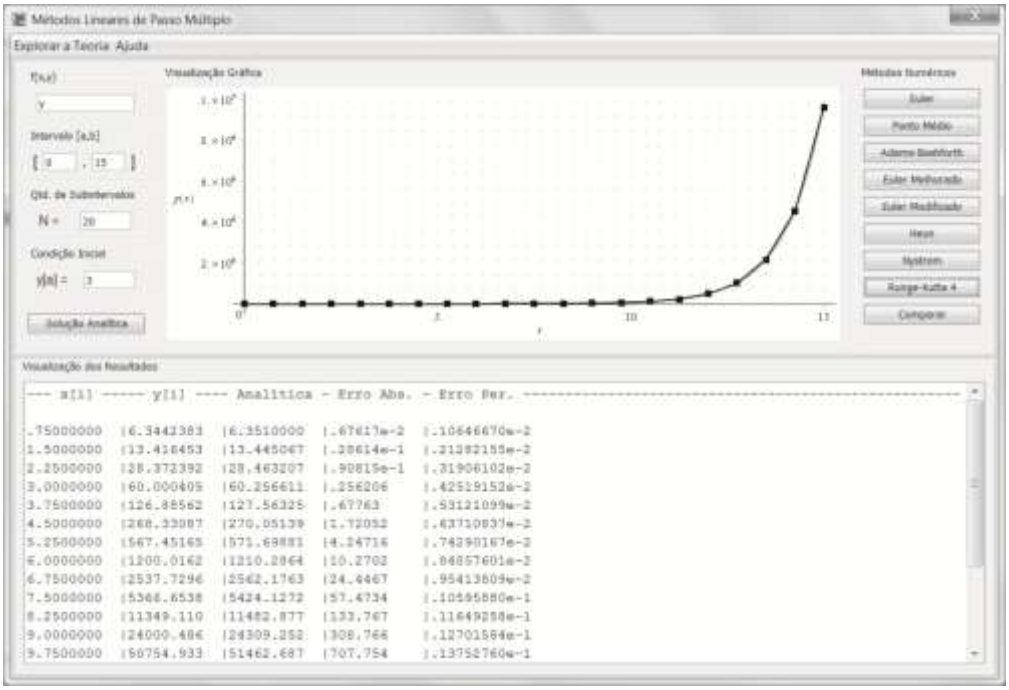

Figura 2. Resolução do PVI (40) pelo Método de Runge-Kutta de Ordem 4.

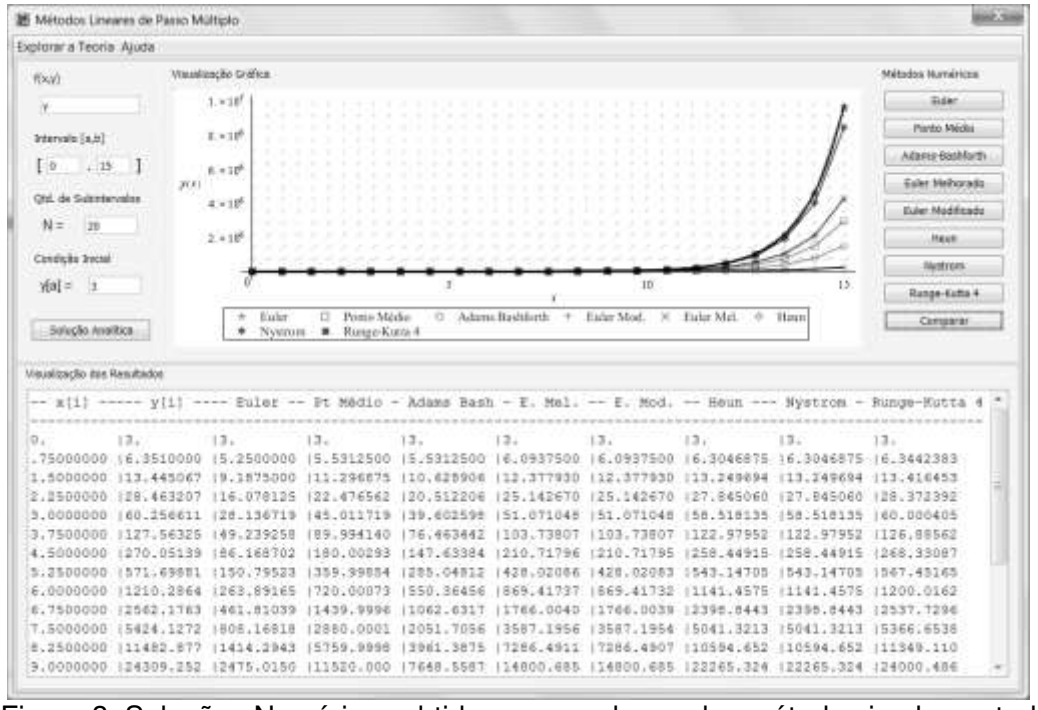

Figura 3. Soluções Numéricas obtidas para cada um dos métodos implementados.

6. CONCLUSÕES

Neste artigo apresentou-se um PVI e teoremas que garantem a existência e unicidade de sua solução. No decorrer, descreveu-se alguns dos Métodos Lineares de Passo Múltiplo Explícitos utilizados para resolve-lo numericamente, os quais, foram implementados em uma *Maplet* programada via *Maple 16*, a fim de tornar clara a análise dos resultados obtidos por estes métodos.

A utilização da *Maplet* possibilitou a visualização gráfica do comportamento de cada método e permitiu a conclusão de que todos eles obtiveram uma boa aproximação da solução analítica, no entanto, a melhor aproximação foi descrita pelo Método de Runge-Kutta de Ordem quatro.

Além disso, este trabalho contribui ainda como fomento à utilização de softwares matemáticos como ferramenta adicional para a atividade docente e discente.

REFERÊNCIAS

[1] ROBINSON, J. C. **An introduction to ordinary differential equations**, New York, USA, Cambridge University Press, 2004.

[2] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**, L. F. Mello (Ed.), São Paulo, Brasil, Pioneira Thomson Learning, 2003.

[3] BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, in: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**, Cortez, 2004, p. 213-231.

[4] SHINGAREVA, I.; LIZÁRRAGA-CELAYA, **Maple and mathematica: a problem solving approach for mathematics**, New York, USA, Springer Wien, 2007.

[5]Maplesoft, **Overview of maplet applications**, 2012. [online]. Available: http://www.maplesoft.com.

[6] FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**, 1 ed., Brasil, Pearson Brasil, 2006.

[7] ROTA, G. **Ordinary differential equations**, 4ª ed., New York, USA, John Wiley & Sons, 1989.

[8] ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**, 1ª ed., São Paulo, Brasil, Pioneira Thomson Learning, 2003.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR pelo incentivo realizado por meio de bolsas de estudo.