

# IPSAL: Implementação do Método dos Efeitos Elementares de Morris para Saída Vetorial<sup>☆</sup>

## IPSAL: Implementation of Morris Elementary Effects Method for Vector Output

Aline Fernanda da Silva Oliveira<sup>1</sup>, Fábio Freitas Ferreira<sup>2,†</sup>, Fábio Gonçalves<sup>2</sup>, Antônio Espósito Junior<sup>2</sup>, Thiago Heidi Horita<sup>3</sup>, Wagner Rambaldi Telles<sup>4</sup>, Gustavo Bastos Lyra<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal Fluminense, Engenharia de Produção - Rio das Ostras, RJ, Brazil

<sup>2</sup>Universidade Federal Fluminense, Departamento de Ciências da Natureza, Rio das Ostras, RJ, Brazil

<sup>3</sup>Universidade Federal Fluminense, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Biosistemas, Niterói, RJ, Brazil

<sup>4</sup>Universidade Federal Fluminense, Departamento de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, Santo Antônio de Pádua, RJ, Brazil

<sup>5</sup>Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Departamento de, Seropédica, RJ, Brazil

<sup>†</sup>**Autor correspondente:** fabiofreitasferreira@id.uff.br

### Resumo

A importância da análise de sensibilidade para a compreensão do impacto das entradas de um modelo em sua saída é fundamental. O estudo identifica quais entradas são influentes em um modelo. A avaliação da sensibilidade de um modelo pode ser analisada localmente, apenas em torno de um ponto nominal no espaço amostral da entrada, ou globalmente, que considera as mudanças dentro de todo o espaço de mutabilidade das entradas. O método de Morris é um método *all-at-a-time*, uma entrada por vez, de análise global. Ele gera conjuntos de entrada do modelo usando a estratégia de amostragem aleatória, que é alcançada por intermédio das chamadas matrizes trajetórias. O método de Morris utiliza-se da média e do desvio padrão dos efeitos elementares para inferir sobre a sensibilidade do modelo com relação a uma entrada, e possíveis correlações entre eles. É neste sentido que o objetivo deste trabalho é apresentar o módulo de Morris na *Inverse Problem and Sensitivity Analysis Library* desenvolvido em Scilab, aplicado em um caso prático.

### Palavras-chave

Efeito Elementar • Análise de Sensibilidade • Método de Morris • IPSAL • Scilab

### Abstract

Sensitivity analysis is essential for understanding the impact of a model's inputs on its output. The study identifies which inputs are influential in a model. The assessment of a model's sensitivity can be analyzed locally, only around a nominal point in the input sample space, or globally, considering changes within the entire input mutability space. The Morris method is a *all-at-a-time*, one-input-at-a-time, global analysis method. It generates sets of model inputs using a random sampling strategy, which is achieved through so-called trajectory matrices. The Morris method uses the mean and standard deviation of elementary effects to infer the model's sensitivity to an input, and possible correlations between them. It is in this sense that the objective of this work is to present the Morris module in the *Inverse Problem and Sensitivity Analysis Library* developed in Scilab, applied in a practical case.

---

<sup>☆</sup> Este artigo é uma versão estendida do trabalho apresentado no XXVII ENMC Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XV ECTM Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, ocorridos em Ilhéus – BA, de 1 a 4 de outubro de 2024.

## Keywords

Elementary Effect • Sensitivity Analysis • Morris Method • IPSAL • Scilab

# 1 Introdução

O acréscimo de complexidade em modelos matemáticos, impulsionados pelo aumento de dados disponíveis e ampliação da capacidade computacional, requer análises mais aprofundadas. Tais modelos matemáticos necessitam de dados de entrada para os alimentarem e, a partir destes, espera-se uma saída [1]. A compreensão do impacto desses dados de entrada na saída de um modelo é de suma importância, pois permite compreender a sua influência [2, 3]. Entretanto, esse conhecimento nem sempre é considerado. Uma ferramenta matemática utilizada para esse propósito é a análise de sensibilidade (SA, sigla em inglês para *Sensitivity Analysis*). A SA, de uma forma mais geral, é o estudo de como as saídas de um modelo estão relacionadas e são influenciadas por suas entradas [4, 5]. Na revisão bibliográfica sobre SA, encontram-se diversos estudos sobre esse assunto, em que as tomadas de decisões apresentam-se em cenários hipotéticos ou sobre a sua eficácia, alterando um ou vários fatores de cada vez.

A SA até certo ponto está relacionada com projeto de experimentos (DOE, sigla em inglês para *design of experiments*), que utiliza-se de um conjunto de ferramentas estatísticas para classificar e avaliar regularmente as relações de causa e efeito, entre fatores de entrada e saída, no modelo estudado [6]. A SA remete-se às décadas de 1970 e 1980, com a ampla disponibilidade de computadores para modelagem computacional. Desde então, o DOE foi estendido para projeto e análise de experimentos computacionais. Coerente com o padrão SA, o DOE disponibiliza um conjunto de ferramentas que permeiam o estudo dos efeitos individuais e combinados das entradas na saída do modelo.

A SA pode ser vista de duas abordagens distintas. A primeira é a análise local, e a segunda é a análise global [7]. A distinção entre essas abordagens é pelo fato que, na análise local, a sensibilidade do modelo é avaliada para cada entrada por vez, perturbando-se uma, e mantendo as demais entradas fixas [8]. Já na análise de sensibilidade global, as saídas do modelo são avaliadas após aplicação de variações em todos os dados de entrada ao mesmo tempo, dentro de um espaço amostral previamente definido [9]. Assim, é possível trabalhar com medidas de dispersão para avaliar a qualidade do parâmetro de entrada [10].

O método de Morris [11] é um método que gera aleatoriamente conjuntos de entrada do modelo que são armazenados em matrizes direcionais. O método avalia uma entrada de cada vez (OAT, abreviação do inglês *One-At-a-Time*) e é considerado um método de análise global de SA [12], em que calcula os efeitos elementares (*EE*) do modelo com relação a cada entrada para cada conjunto gerado aleatoriamente [13]. Esse método eficiente e confiável identifica e classifica as variáveis importantes que são feitas com base na diferença calculada entre um par de simulações de modelo [14].

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é apresentar melhorias a primeira implementação do método de Morris na *Inverse Problem and Sensitivity Analysis Library* (IPSAAL) [15]. Foram acrescentados quatro novos casos testes, incluindo um com saída vetorial.

## 2 Materiais e Métodos

Considere um modelo matemático e/ou computacional  $y(x_1, \dots, x_k)$  cujas entradas são as componentes do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ , em que  $k$  é o total de entradas do modelo. Considere também que cada uma dessas entradas pertence a uma aresta de um hipercubo unitário  $\Omega$ , isto é,  $x_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , e são obtidas por meio de matrizes direcionais aleatórias.

### 2.1 Efeito Elementar

O efeito em cada entrada, também chamado de elementar, é dado por

$$EE|_{x_i} = \frac{y(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \dots, x_k) - y(\mathbf{x})}{\Delta} \quad (1)$$

em que  $y$  é o modelo a ser analisado,  $x_i$  é a  $i$ -ésima entrada do modelo, e  $\Delta$  é a perturbação de  $x_i$ .

Note-se que o efeito elementar apresentado na Eq. (1) é calculado em um ponto específico do domínio do problema abordado.

Neste artigo é apresentado um caso teste em que a saída do modelo é vetorial. Observa-se na Eq. (1) que o efeito elementar é calculado para funções reais. No caso de modelos que apresentem uma saída vetorial, podem ser adotadas duas estratégias: (1) escolher pontos de interesse do domínio e realizar a análise de sensibilidade para cada

um dos mesmos; (2) utilizar o modelo proposto a seguir, em que o efeito elementar de um parâmetro será a média dos efeitos elementares do parâmetro em todos os pontos do domínio, ou seja

$$EE|_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^M EE|_{x_i}^{M_j}}{M} \quad (2)$$

em que  $M$  é o total de dias do ciclo,  $EE|_{x_i}^{M_j}$  é o efeito elementar do modelo em cada parâmetro  $x_i$  no dia  $j$  do ciclo.

## 2.2 Matrizes Trajetórias

Tem-se uma matriz direcional de ordem  $(k + 1) \times k$  em que para cada coluna  $j$  existe duas linhas que diferem entre si apenas na sua  $j$ -ésima entrada. Denota-se por  $\mathbf{B}$  a matriz direcional de ordem  $(k + 1) \times k$  dada por

$$\mathbf{B}_{k+1,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

O método de Morris consiste em construir matrizes trajetórias  $B_i^*$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $r$  é o total de trajetórias. Cada matriz trajetória é obtida por

$$B_i^* = \left( \mathbf{J}_{k+1,1} \mathbf{x}_{1,k}^* + (\Delta/2) \left[ (2\mathbf{B}_{k+1,k} - \mathbf{J}_{k+1,k}) \mathbf{D}_{k,k}^* + \mathbf{J}_{k+1,k} \right] \right) \mathbf{P}_{k,k}^* \quad (4)$$

em que  $\Delta$  tem valor  $1/(p - 1)$ ,  $p$  é chamado de nível do método de Morris e  $p - 1$  é a quantidade de subintervalos do intervalo  $[0, 1]$ ;  $\mathbf{D}^*$  é uma matriz diagonal de ordem  $k$  na qual cada elemento da diagonal é  $+1$  ou  $-1$ , obtido aleatoriamente com igual probabilidade;  $\mathbf{J}$  é uma matriz  $k + 1$  por  $k$  com todas as entradas iguais a 1. Observa-se que a matriz  $(1/2) \left[ (2\mathbf{B} - \mathbf{J}) \mathbf{D}^* + \mathbf{J} \right]$  é uma matriz  $k + 1$  por  $k$  na qual cada coluna definida é igual a cada coluna de  $\mathbf{B}$  ou é determinada substituindo 1 por 0 e 0 por 1;  $\mathbf{P}^*$  é uma matriz permutação aleatória construída a partir da matriz identidade,  $k$  por  $k$ , na qual cada coluna contém um elemento igual a 1 e todos os outros iguais a 0, e não há duas colunas com 1 na mesma linha;  $\mathbf{x}^*$  é uma matriz linha em que cada elemento  $x_i^*$ ,  $i = 1, \dots, k$ , é escolhido aleatoriamente de  $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 1/(p - 1), 2/(p - 1), \dots, 1 - \Delta)$ . A quantidade de componentes de  $\tilde{\mathbf{x}}$  dependerá da escolha do cálculo de  $\Delta$ .

Após o cálculo das  $r$  orientações aleatórias independentes de  $\mathbf{B}$ , as trajetórias serão concatenadas para formar a matriz design  $\mathbf{X}$  para todo o experimento dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^* \\ \mathbf{B}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

Após a construção da matriz  $\mathbf{X}$ , são calculados os efeitos elementares, Eq. (1), para cada entrada  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , gerando  $k$  efeitos elementares. Para cada efeito elementar o modelo é executado duas vezes. Logo, para o cálculo de todos os efeitos elementares de uma entrada, haverá  $2rk$  execuções do modelo.

Na Fig. 1 observa-se o fluxo de trabalho no código computacional.

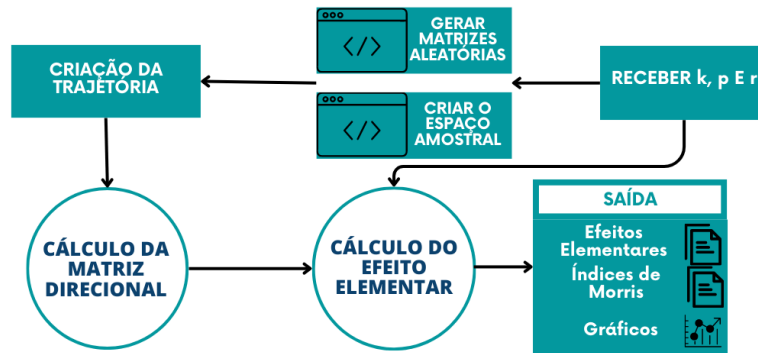


Figura 1: Fluxograma para o cálculo dos efeitos elementares.

### 2.3 Índices de Morris

Para avaliar os efeitos dos parâmetros de entrada na saída do modelo, será usado a média absoluta dos efeitos elementares [16],

$$\mu_i^* = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |EE|_{x_i}|_j \tag{6}$$

O desvio padrão do efeito elementar é descrito por

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \left( [EE|_{x_i}]_j - \mu_i^* \right)^2} \tag{7}$$

em que  $i = 1, \dots, k$  representa a entrada do modelo, e  $j$  percorre os efeitos elementares dessa entrada.

Os valores  $\mu_j^*$  e  $\sigma_j$  são utilizados para analisar as entradas, em vários pontos no espaço amostral, assim como as propriedades distributivas desses valores. Desta forma, é avaliada a sensibilidade global do modelo para cada entrada individualmente. Quanto maior o valor de  $\mu_j^*$ , mais sensível é o modelo com relação a  $j$ -ésima entrada. O desvio padrão do EE, Eq. (7), aponta para possíveis relações com outras variáveis e/ou que a variável tem um efeito não linear na saída [12, 11].

### 2.4 Código Computacional

A biblioteca IPSAL deve ser baixada e salva na pasta de trabalho do usuário. Em seguida, as funções da biblioteca para o método de Morris devem ser declaradas.

```

address = get_absolute_file_path('MORRIS.sce');
exec(address+' \functions \modelo . sci ');
exec(address+' \functions \funcaoprincipa . sci ');
exec(address+' \functions \calcula . sci ');
exec(address+' \functions \graph_distribuicao_entrada . sci ');
exec(address+' \functions \graph_barra_horizontal . sci ');
exec(address+' \functions \graph_scarter_media_desvio . sci ');
exec(address+' \functions \matriz_desing . sci ');
  
```

Para realizar a análise de sensibilidade usando o método de Morris, deve-se salvar o modelo a ser analisado como **modelo.sci**, definir os valores de  $r$ ,  $k$  e  $p$ , e chamar a função

```
[B, x_] = matriz_desing(r, k, p)
```

para construir a matriz de design.

Para o cálculo dos efeitos elementares, deve-se usar a função

```
[EE, media, desvio]=calcula(k, r, B)
```

retornando os efeitos elementares, a média dos valores absolutos dos efeitos elementares e o desvio padrão.

Para gerar os gráficos, são utilizadas funções gráficas

```
graph_distribuicao_entrada( address , r , k , x_ )
graph_barra_horizontal( address , media , desvio , r , k )
graph_scarter_media_desvio( address , media , desvio , k , r )
```

Além da nova função para cálculo dos efeitos elementares para saída vetorial, veja Seção 3.5, foi criada a função `exec( address+' \ functions \ insterpolation . sci ' )`;

responsável por transformar a matriz design, construída baseada em hiper arestas do hipercubo unitário, em uma matriz design adaptada para os intervalos de cada parâmetro de entrada do modelo, e deve ser chamada no código como

```
[B_ , x_ ] = matriz_desing( r , k , p )
B = interpolation( B_ , mini , maxi )
```

em que  $B_$  é a matriz design construída baseada no hipercubo unitário, *mini* contém os valores mínimos de cada parâmetro, e *maxi* contém os valores de máximos de cada parâmetro.

Na Figura 2, é ilustrada a estrutura organizacional do código desenvolvido no Scilab. A pasta *resultados* será responsável por armazenar todos os resultados obtidos com o método.

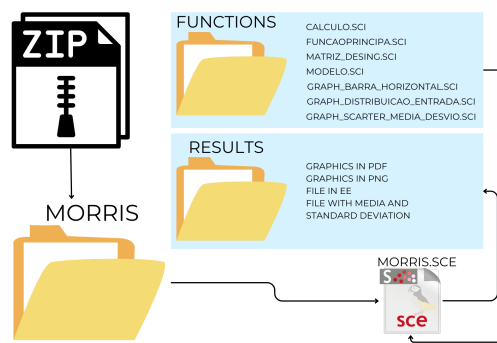


Figura 2: Estrutura organizacional do código.

O módulo do método de Morris no Scilab pode ser acessado pelo repositório Modelagem Computacional, Problemas Inversos e Meio Ambiente.

## 2.5 Casos Testes

Será aplicado o método de Morris para 5 casos testes, aos quais a matriz design terá 100 orientações aleatórias,  $r = 100$ , a partir da Eq. (4), a fim de estimar a sensibilidade dos parâmetros e/ou entradas de cada caso teste. A escolha típica de  $p$  para SA é 4, 6 ou 8, em razão da sua distribuição uniforme [12]. No presente trabalho será usado o valor  $p = 6$ , e diante disso  $\Delta = 1/5$ , e consequentemente,  $\mathbf{x} = (0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5)$ .

### 2.5.1 Caso teste 01: função polinomial com perturbação senoidal

Considere um modelo descrito pela função polinomial com perturbação senoidal

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2 + x_2 \sin(x_3) + x_4 \tag{8}$$

no qual,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  serão os dados de entrada, essas entradas podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas no intervalo unitário  $[0, 1]$ .

### 2.5.2 Caso teste 02: modelo Eason 2D

Considere o modelo Eason 2D descrito pela função

$$f(\mathbf{x}) = -\cos(x_1) \cos(x_2) e^{-(x_1-\pi)^2 - (x_2-\pi)^2} \tag{9}$$

no qual,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  serão os dados de entrada. As entradas da Eq. (9) podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas no intervalo de  $(x_1, x_2) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ .

### 2.5.3 Caso teste 03: função 2D de Michalewicz

Considere a função 2D de Michalewicz

$$f(\mathbf{x}) = - \left\{ \sin(x_1) \left[ \sin\left(\frac{x_1^2}{\pi}\right) \right]^{2m} + \sin(x_2) \left[ \sin\left(\frac{2x_2^2}{\pi}\right) \right]^{2m} \right\} \quad (10)$$

no qual,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  serão os dados de entrada, essas entradas podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas no intervalo de  $(x_1, x_2) \in [0; 5] \times [0; 5]$ , e  $m=10$ .

### 2.5.4 Caso teste 04: função six-hump camel back

Considere o modelo six-hump camel back descrito pela função

$$f(\mathbf{x}) = (4 - 2.1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3})x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)x_2^2 \quad (11)$$

no qual  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  serão os dados de entrada, essas entradas podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas no intervalo de  $(x_1, x_2) \in [-3; 3] \times [-2; 2]$ .

### 2.5.5 Caso teste 05: balanço hídrico sequencial de Thornthwaite & Mather

Para calcular o armazenamento de água no solo (*ARM*) utiliza-se o modelo de Thornthwaite & Mather [5]. A equação para o cálculo do *ARM* é dada por

$$ARM_i = \begin{cases} CAD_i \cdot e^{\left(\frac{Neg.Acu_i}{CAD_i}\right)}, & \text{para } (P_i + I_i) - ETc_i < 0 \\ ARM_{i-1} + (P_i + I_i - ETc_i), & \text{para } (P_i + I_i) - ETc_i \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

em que *ARM* é o armazenamento de água no solo (*mm*); *P* é a precipitação pluvial (*mm*); *I* é a irrigação (*mm*); *Neg.Acu* é o acúmulo negativo de água ( $m^3m^{-3}$ ), *CAD* é a capacidade de água disponível no solo ( $m^3m^{-3}$ ), e *ETc* é a evapotranspiração da cultura em condições ideais em uma determinada região, e *i* é o subscrito que representa o dia do ciclo. A Eq. (12) necessita de parâmetros de entrada [5], entre eles os parâmetros de coeficiente da cultura. Eles representam as características específicas da cultura como a altura, propriedades aerodinâmicas da folha e evaporação do solo. São eles: *Kc<sub>i</sub>* que é o coeficiente da cultura inicial; *Kc<sub>m</sub>* é o coeficiente da cultura intermediário; *Kc<sub>f</sub>* é o coeficiente da cultura final.

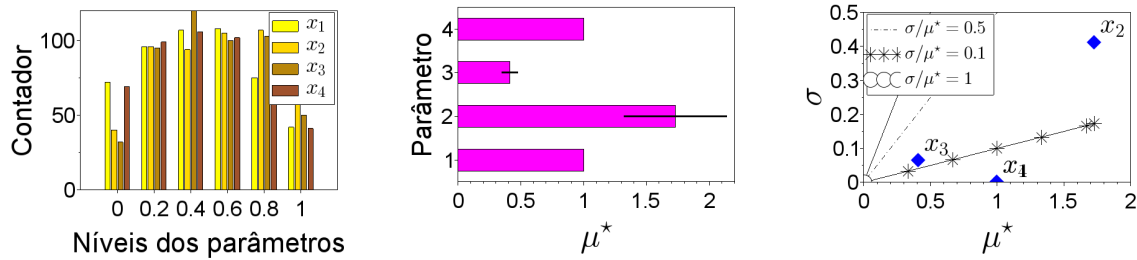
## 3 Resultados e Discussão

Nesta seção são apresentados os resultados da análise de sensibilidade pelo método de Morris utilizando a biblioteca IPSAI. O caso teste 01, Seção 2.5.1, foi apresentado em [15], o qual encontra-se mais detalhes e discussão sobre o mesmo. Após modificações e melhorias no módulo do método de Morris do IPSAI, buscou-se outros casos testes na literatura. Os casos testes descritos nas Seções 2.5.2-2.5.4 apresentam três funções testes com funções de variáveis reais, e o objetivo é avaliar por meio do método de Morris o quão essas variáveis são influentes na função, a sua não linearidade e/ou sua iteração com outras variáveis. No caso mostrado na Seção 2.5.5 é apresentado um modelo cuja saída é vetorial. Esse modelo recebe parâmetros de entrada, e por meio desses parâmetros, juntamente com dados experimentais, retorna o armazenamento de água no solo ao longo de uma quantidade de dias. Para isso, foi proposto uma modificação na forma como o índice de Morris é calculado. O efeito elementar, Eq. (1), foi modificado. Nesta versão, o efeito elementar é calculado selecionando uma amostra e aplicando o modelo em um ponto do domínio. Na modificação, o efeito elementar, Eq. (2), passa a ser calculado como a média dos efeitos elementares em cada ponto do domínio.

### 3.1 Resultados do Caso Teste 01: função polinomial com perturbação senoidal

Por meio do caso teste apresentado na Seção (2.5.1), a matriz design, Eq. (5), é construída com *r* diferentes matrizes trajetórias.

Na Fig. 3(a) observa-se as *r* = 100 distribuições aleatória dos valores do conjunto {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}, ao qual cada componente *x<sub>i</sub>* do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  é forçado a assumir.



(a) Distribuição dos intervalos para cada uma das entradas. (b) Média e desvio padrão para cada entrada do modelo. O eixo vertical representa as entradas, numeradas de 1 a 4. (c) Índices do método Morris. As entradas  $x_1$  e  $x_4$  se sobrepuseram.

Figura 3: Resultados para o Caso Teste 01.

O método de Morris consiste em analisar e relacionar a média e o desvio padrão, Equações (6) e (7), dos efeitos elementares, Eq. (1), de cada entrada. Na Tabela 1 são apresentados esses resultados. Observou-se que os parâmetros  $x_1$  e  $x_4$  tem médias constantes,  $\mu^* = 1$ , e desvio padrão nulo. Entradas influentes têm a média dos efeitos elementares alta. Como pode ser observado nas Fig. 3(b) e 3(c), as entradas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_4$  são mais influentes do que a entrada  $x_3$ , pois uma variação nessas entradas resultaram em uma variação significativa no modelo. O desvio padrão pequeno dos efeitos elementares das entradas  $x_1$  e  $x_4$  resulta num efeito considerado linear. Esse efeito pode ser observado na Eq. (8). O valor alto para o desvio padrão, principalmente se for da ordem de grandeza do efeito elementar, o efeito é não linear ou causa interações com outras entradas. Como pode-se observar na Eq. (8), e nas Fig. 3(b) e 3(c), as entradas  $x_2$  e  $x_3$  são não lineares dentro do modelo, e a entrada  $x_2$  com interação não linear mais forte do que  $x_3$ .

Na Tabela 1 são apresentadas as avaliações das entradas de forma resumida.

Tabela 1: Resumo dos efeitos nas entradas do Caso Teste 01.

$x$	$\mu_j^*$	Avaliação	$\sigma_j$	Avaliação
$x_1$	1.000	Influente	0.000	Efeito Linear
$x_2$	1.653	Mais Influente	0.423	Efeito Não Linear ou Interação com outra entrada
$x_3$	0.390	Menos Influente	0.065	Efeito Não Linear Baixo ou Interação com outra entrada
$x_4$	1.000	Influente	0.000	Efeito Linear

### 3.2 Resultados do Caso Teste 02: modelo Eason 2D

Na Figura (4) são apresentadas, para cada entrada, as  $r = 100$  distribuições de valores no intervalo descrito no caso teste descrito na Seção 2.5.2.

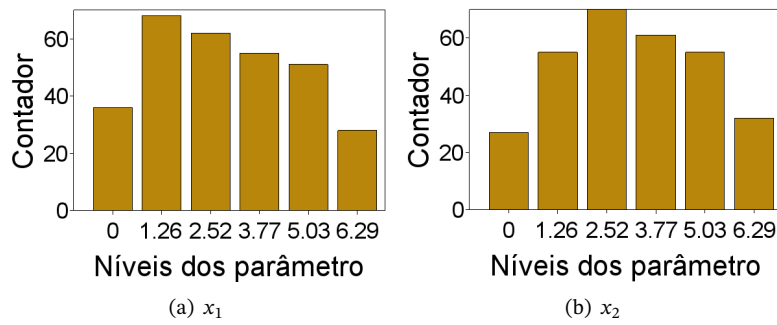
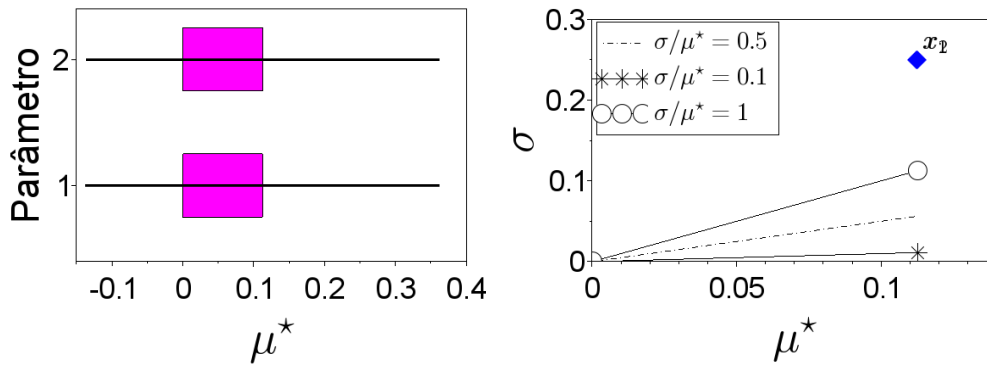


Figura 4: Distribuição aleatória para o Caso Teste 02.

Por outro lado, na Fig. (5) são mostrados os resultados obtidos para a análise de sensibilidade das entradas  $x_1$  e  $x_2$ . Observou-se que a média de ambas as entradas deram resultados parecidos, se sobrepondo no gráfico, Fig. 5(b), e com alto desvio padrão. Logo, tem-se que ambas as entradas são influentes no modelo, assim como tem forte efeito não linear, ou forte interação com outras entradas, ou nesse caso, há forte interação entre elas. Na Tabela 2 observa-se os resultados resumidos.



(a) Média e desvio padrão para cada entrada do modelo. (b) Índices do método Morris. As entradas se sobrepos-  
A numeração no eixo vertical representa as entradas do ram no gráfico.  
modelo.

Figura 5: Representação dos índices de Morris do Caso Teste 02.

Tabela 2: Resumo dos efeitos nas entradas do Caso Teste 02.

	$\mu_j^*$	Avaliação	$\sigma_j$	Avaliação
$x_1$	0.1123	Influente	0.2498	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada
$x_2$	0.1126	Influente	0.2496	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada

### 3.3 Resultados do Caso Teste 03: função 2D de Michalewicz

Na Figura (6), são mostradas, para cada entrada, as  $r = 100$  distribuições de valores no intervalo descrito no caso teste 2.5.3.



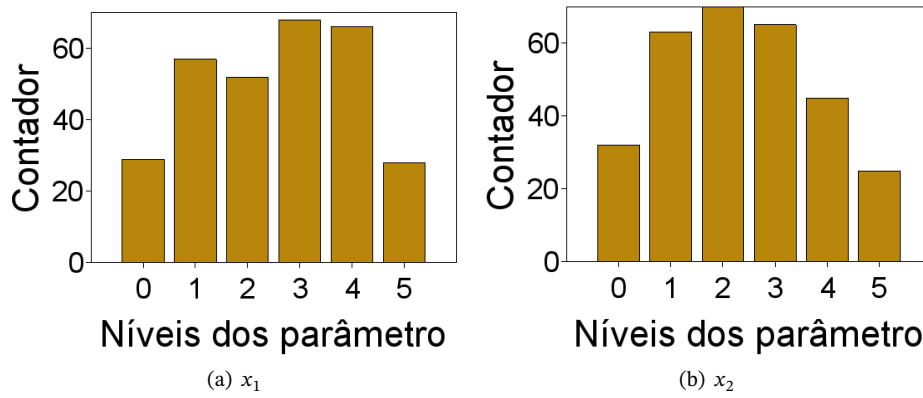
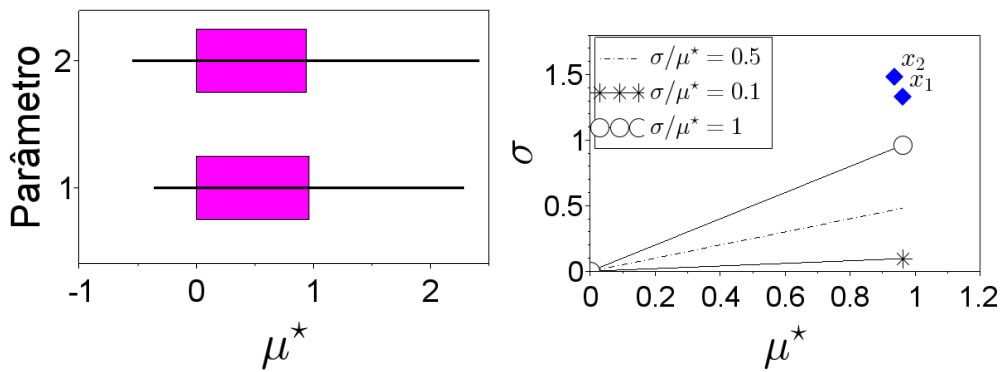


Figura 6: Distribuição aleatória para o Caso Teste 03.

São apresentados, na Fig. (7), os resultados obtidos para a análise de sensibilidade das entradas  $x_1$  e  $x_2$ . Observou-se que a média de ambas as entradas deram resultados alto, acima da reta 1 : 1, Fig. 7(b), e com alto desvio padrão. Logo, tem-se que ambas as entradas são influentes no modelo, assim como tem forte efeito não linear, ou forte interação com outras entradas, ou nesse caso, há forte interação entre elas. Na Tabela 3 observa-se os resultados resumidos.



(a) Média e desvio padrão para cada entrada do modelo (b) Índices do método Morris: Média x Desvio padrão. do Caso Teste 03.

Figura 7: Representação dos índices de Morris do Caso Teste 03.

Tabela 3: Resumo dos efeitos nas entradas do Caso Teste 03.

	$\mu_j^*$	Avaliação	$\sigma_j$	Avaliação
$x_1$	0.9631	Influente	1.3273	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada
$x_2$	0.9384	Influente	1.4813	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada

### 3.4 Resultados do Caso Teste 04: Função six-hump camel back

Na Figura (8) são mostradas, para cada entrada, as  $r = 100$  distribuições de valores no intervalo descrito na Seção 2.5.4.

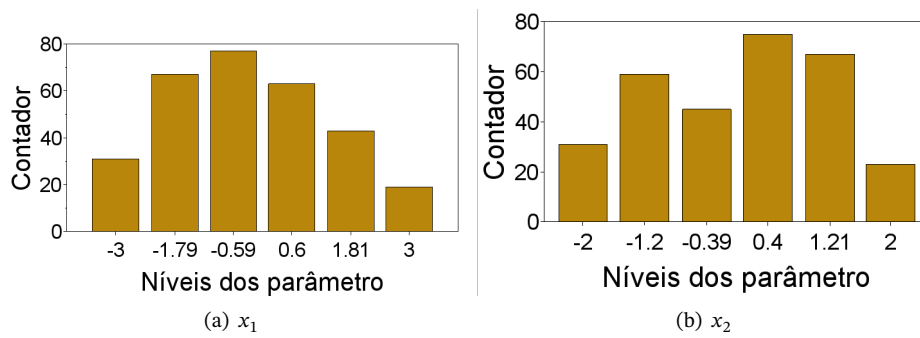


Figura 8: Distribuição aleatória para o Caso Teste 04.

Na Figura (9) são apresentados os resultados obtidos para realizar a análise de sensibilidade das entradas  $x_1$  e  $x_2$ . Deve-se notar que a média das duas entradas produz resultados elevados, demonstrando que os efeitos de ambos são influentes no modelo, mas o efeito de  $x_2$  é mais influente do que o de  $x_1$ . Os desvios padrão de ambos são grandes, mostrando que têm fortes efeitos não lineares e interagem fortemente entre si. A Tabela 4 mostra os resultados de forma resumida.

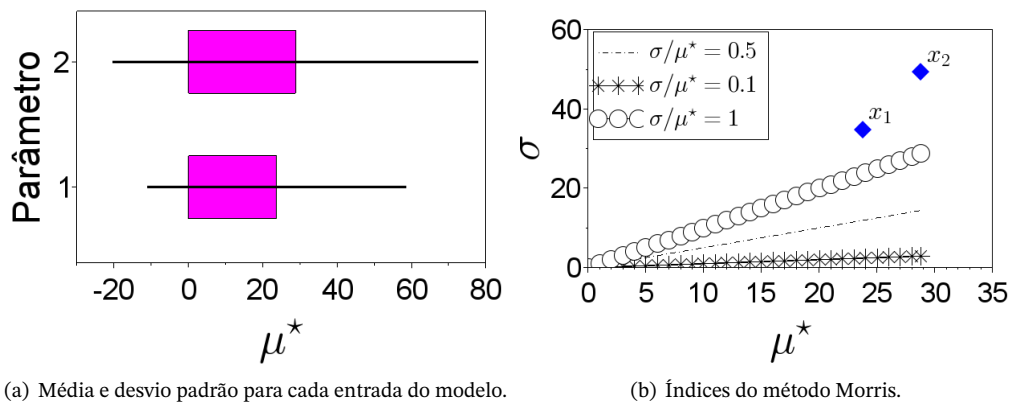


Figura 9: Representação dos índices de Morris do Caso Teste 04.

Tabela 4: Resumo dos efeitos nas entradas do Caso Teste 04.

	$\mu_j^*$	Avaliação	$\sigma_j$	Avaliação
$x_1$	23.7566	Influente	34.7797	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada
$x_2$	28.7918	Mais Influente	49.2406	Forte efeito Não Linear ou Forte interação com outra entrada

### 3.5 Resultados do Caso Teste 05: Balanço Hídrico Sequencial de Thornthwaite & Mather

O armazenamento de água no solo, Eq. (12), foi calculado utilizando dados da cultura e observações agrometeorológicas do experimento de campo conduzido no município de Arapiraca/AL em cultivo de milho, localizado a latitude  $09^\circ 38,6' S$  longitude  $36^\circ 40,3' W$  e altitude 260 m. O plantio do milho variedade BR 106, foi realizado em 4 de junho, início do período úmido da região, e a colheita ocorreu em 08 de outubro de 2005, no período seco, o que totalizou 126 dias de cultivo.

Os gráficos de distribuição dos parâmetros são construídos de forma individual por meio da função Scilab:

`exec(address+' \ functions \ graph_distribuicao_entrada_individual . sci ');`

e deve ser chamada no código como

`graph_distribuicao_entrada_individual(address, r, k, x_, posicao)`

em que *address* é o endereço da pasta onde a função está guardada, *r* o total de amostras, *x\_* o vetor que contem as possíveis distribuição do parâmetro, e *posicao* representa o parâmetro a ser analisado.

Nas Figura 10(a)-(c) observa-se as  $r = 100$  distribuições aleatória para os parâmetros  $Kc_i$ ,  $Kc_m$  e  $Kc_f$ .

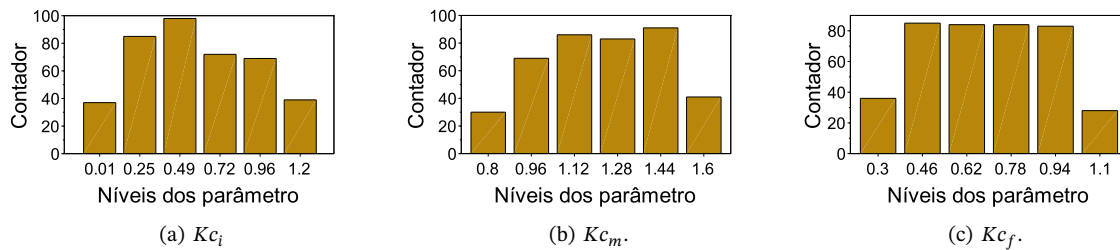


Figura 10: Distribuição aleatória para o cálculo dos efeitos elementares do Caso Teste 05.

Para calcular os efeitos elementares, e os índices de Morris, do modelo com saída vetorial, utiliza-se a função

`exec(address+' \ functions \ calculo_vec . sci ');`

e deve ser chamada no código como

`[EE, media, desvio] = calculo_vec(k, r, B)`

em que *r* é o total de amostras, *k* é o total de parâmetros, e **X** é a matriz design.

Na Figura 11 observou-se a relação  $\mu \times \sigma$ . Os 3 parâmetros analisados localizaram-se sobre a reta  $\sigma = 0.1\mu$ , isto é, o desvio padrão equivale aproximadamente a 10% da média dos efeitos elementares. Observou-se que o  $Kc_m$  tem mais influência no modelo do que o  $Kc_i$  e o  $Kc_f$ , porém todos os parâmetros foram influentes. Como o desvio padrão foi baixo, 10% da média, os 3 parâmetros tiveram efeitos não lineares negligenciáveis. No entanto, podem ter iterações com outros parâmetros do modelo.

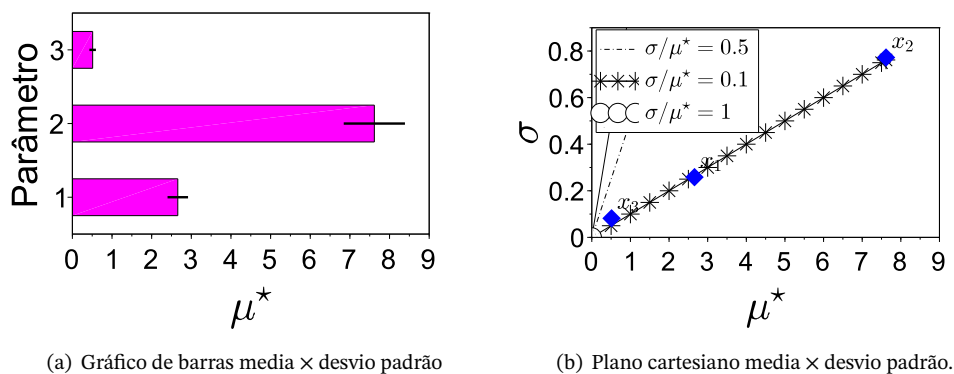


Figura 11: Representação dos índices de Morris do Caso Teste 05.

Pode-se observar as influências dos 3 parâmetros na equação do calculo de  $Kc$ , o qual alimenta o termo  $ETc$  da Eq. (12), dada por

$$Kc = \begin{cases} Kc_{ini}, & t \leq L_{ini} \\ Kc_{ini} + \frac{(Kc_{mid} - Kc_{ini})(t - L_{ini})}{L_{cres}}, & L_{ini} < t \leq (L_{ini} + L_{cres}) \\ Kc_{mid}, & (L_{ini} + L_{cres}) < t \leq (L_{ini} + L_{cres} + L_{mid}) \\ Kc_{mid} + \frac{(Kc_{fim} - Kc_{mid})(t - L_{ini} - L_{cres} - L_{mid})}{L_{fim}}, & t > (L_{ini} + L_{cres} + L_{mid}) \end{cases} \quad (13)$$

em que o parâmetro  $L$ , corresponde aos 4 estágios distintos da cultura, boletim FAO-56 [17]. Os 3 parâmetros analisados tem efeitos lineares, assim como não há forte iteração com outros parâmetros. Também observa-se que o parâmetro  $Kc_m$  tem mais iteração na equação, e isso fica em evidência na análise de sensibilidade. Na Tabela 5 são apresentadas as avaliações dos parâmetros de forma resumida.

Tabela 5: Resumo dos efeitos nas entradas do Caso Teste 05.

	$\mu_j^*$	Avaliação	$\sigma_j$	Avaliação
$Kc_i$	2.66	Influente	0.26	Efeito Linear Negligenciável ou Pouca iteração com outra entrada
$Kc_m$	7.62	Mais Influente	0.77	Efeito Não Linear Negligenciável ou Iteração com outra entrada
$Kc_f$	0.51	Menos Influente	0.08	Efeito Não Linear Negligenciável ou Pouca iteração com outra entrada

## 4 Conclusões

Os resultados obtidos estão de acordo com o modelo utilizado no caso teste. As entradas lineares obtiveram o desvio padrão igual a zero, e as não lineares diferente de zero. Todas as entradas são influentes, umas mais do que outras, mas todas importantes no modelo. Diante do externado, verifica-se, que o código desenvolvido em Scilab está bem estruturado e organizado afim de com apenas uma adaptação no código do modelo ser possível realizar a análise de sensibilidade pelo método de Morris de qualquer modelo.

## Referências

- [1] E. Borgonovo e E. Plischke, “Sensitivity analysis: A review of recent advances,” *European Journal of Operational Research*, vol. 248, no. 3, pp. 869–887, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.032>
- [2] A. Saltelli, K. Aleksankina, W. Becker, P. Fennell, F. Ferretti, N. Holst, S. Li, e Q. Wu, “Why so many published sensitivity analyses are false: A systematic review of sensitivity analysis practices,” *Environmental Modelling & Software*, vol. 114, pp. 29–39, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2019.01.012>
- [3] F. F. Ferreira, A. J. da Silva Neto, G. B. Lyra, e S. P. de Queiroz, “Van Genuchten sensitivity analysis by Morris method,” *Anais do XXIII ENMC – Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XI ECTM – Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais*, 2020.
- [4] S. Razavi, A. J. Jakeman, A. Saltelli, C. Prieur, B. Iooss, E. Borgonovo, E. Plischke, S. L. Piano, T. Iwanaga, W. E. Becker, S. Tarantola, J. H. A. Guillaume, J. D. Jakeman, H. V. Gupta, N. Melillo, G. Rabitti, V. Chabridon, Q. Duan, e H. R. Maier, “The future of sensitivity analysis: An essential discipline for systems modeling and policy support,” *Environmental Modelling & Software*, vol. 137, p. 104954, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2020.104954>
- [5] F. F. Ferreira, T. H. Horita, G. B. Lyra, e F. Gonçalves, “Análise de sensibilidade e otimização do modelo de Thornthwaite and Mather adaptado para simulação de culturas agrícolas pelo método de Levenberg-Marquardt com restrições,” *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão*, vol. 8, no. 1, pp. 1–17, 2023.
- [6] A. Jankovic, G. Chaudhary, e F. Goia, “Designing the design of experiments (DOE) – an investigation on the influence of different factorial designs on the characterization of complex systems,” *Energy and Buildings*, vol. 250, p. 111298, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2021.111298>
- [7] F. Campolongo, A. Saltelli, e J. Cariboni, “From screening to quantitative sensitivity analysis. a unified approach,” *Computer Physics Communications*, vol. 182, no. 4, pp. 978–988, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.12.039>
- [8] S. Razavi e H. V. Gupta, “What do we mean by sensitivity analysis? the need for comprehensive characterization of “global” sensitivity in earth and environmental systems models,” *Water Resources Research*, vol. 51, no. 5, pp. 3070–3092, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2014WR016527>

- [9] F. Pianosi, K. Beven, J. Freer, J. W. Hall, J. Rougier, D. B. Stephenson, e T. Wagener, “Sensitivity analysis of environmental models: A systematic review with practical workflow,” *Environmental Modelling & Software*, vol. 79, pp. 214–232, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2016.02.008>
- [10] Q. Ge e M. Menendez, “Extending morris method for qualitative global sensitivity analysis of models with dependent inputs,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 162, pp. 28–39, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.res.2017.01.010>
- [11] F. Campolongo e R. Braddock, “The use of graph theory in the sensitivity analysis of the model output: a second order screening method,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 64, no. 1, pp. 1–12, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(98\)00008-8](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(98)00008-8)
- [12] A. Franczyk, “Using the Morris sensitivity analysis method to assess the importance of input variables on time-reversal imaging of seismic sources,” *Acta Geophysica*, vol. 67, p. 1525–1533, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11600-019-00356-5>
- [13] M. Ruano, J. Ribes, A. Seco, e J. Ferrer, “An improved sampling strategy based on trajectory design for application of the Morris method to systems with many input factors,” *Environmental Modelling & Software*, vol. 37, pp. 103–109, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2012.03.008>
- [14] D. King e B. Perera, “Morris method of sensitivity analysis applied to assess the importance of input variables on urban water supply yield – a case study,” *Journal of Hydrology*, vol. 477, pp. 17–32, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.10.017>
- [15] A. F. da Silva Oliveira, F. F. Ferreira, F. Gonçalves, A. E. Junior, L. F. A. Borges, T. H. Horita, e G. B. Lyra, “Ipsal: Implementation of the morris elementary effects method,” *Anais do XXIII ENMC – Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XI ECTM – Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais*, 2023.
- [16] F. Campolongo, J. Cariboni, e A. Saltelli, “An effective screening design for sensitivity analysis of large models,” *Environmental Modelling & Software*, vol. 22, no. 10, pp. 1509–1518, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2006.10.004>
- [17] F. FAOSTAT, “Organização das nações unidas para alimentação e agricultura (FAO),” *Bancos de dados estatísticos da FAO. Dados de agricultura*, 2000.