

# Modelagem Matemática para a Nova Harmonia Planetária<sup>☆</sup>

## Mathematical Modeling For The New Planetary Harmony

Evandro Menezes de Souza Amarante<sup>1,†</sup>, Evandro Carlos Ferreira dos Santos<sup>2</sup>, Luiz Sampaio Athayde Junior<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Brasil Mecatrônica e Computação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 40210-630, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 40170-110, Brasil*

<sup>3</sup>*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 40170-115, Brasil*

<sup>†</sup>**Autor correspondente:** [evandro.amarante@ufba.br](mailto:evandro.amarante@ufba.br)

### Resumo

A dinâmica que envolve o movimento dos planetas e de outros corpos celestes foi objeto de estudo por muito tempo. Vários foram os modelos astronômicos desenvolvidos com o intuito de descrever a mecânica celeste. Com o intuito de demonstrar a nova Harmonia Planetária, este artigo apresenta uma modelagem matemática embasada por uma metodologia que permite verificar a inclinação do eixo de rotação dos planetas, em que a força gravitacional começa a atuar de maneira intensa, apropriando-se de conceitos de Geometria Diferencial e de modelo de regressão. Para tanto, foram desenvolvidos modelos de regressão para prever a velocidade harmônica dos planetas em relação à inclinação dos seus eixos de rotação. De posse dos resultados encontrados, verificou-se que o modelo se ajustou muito bem aos dados, pois esse foi capaz de prever 99,99% das informações. A partir da análise da curvatura, verificou-se que planetas com inclinação inferior a  $9,59^\circ$  são influenciados fortemente pela atuação gravitacional do Sol em relação a eles, explicando, assim, o fato de planetas com baixas inclinações possuírem velocidades harmônicas maiores. Além disso, a partir da metodologia proposta, foi possível perceber que este novo modelo orbital fornece uma nova harmonia matemática para todos os planetas do nosso sistema solar, uma vez que a mecânica newtoniana não explica totalmente os movimentos de Mercúrio.

### Palavras-chave

Geometria Diferencial • Curvatura • Harmonia Planetária • Inclinação • Velocidade harmônica

### Abstract

The dynamics surrounding the movement of planets and other celestial bodies have been the subject of study for a long time. Various astronomical models have been developed to describe celestial mechanics. To introduce a new concept of Planetary Harmony, this article presents a mathematical model based on a methodology that allows us to verify the inclination of the planets' axes of rotation at which gravitational force begins to act intensely, utilizing concepts from Differential Geometry and a regression model. To this end, regression models were developed to predict the harmonic velocity of planets in relation to the inclination of their axes of rotation. The results showed that the model fitted the data so well that it was able to predict 99.99% of the information. The curvature analysis showed that planets with an inclination of less than  $9.59^\circ$  are strongly influenced by the Sun's gravitational action

---

<sup>☆</sup> Este artigo é uma versão estendida do trabalho apresentado no XXVII ENMC Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XV ECTM Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, ocorridos em Ilhéus – BA, de 1 a 4 de outubro de 2024.

in relation to them, thus explaining why planets with low inclinations have higher harmonic velocities. Furthermore, the proposed methodology revealed that this new orbital model offers a mathematical harmony for all the planets in our solar system, as Newtonian mechanics does not fully account for Mercury's movements.

## Keywords

Differential Geometry • Curvature • Planetary Harmony • Inclination • Harmonic Velocity

## 1 Introdução

O Sol é cerca de 109,2986 vezes maior do que a Terra em diâmetro e sabe-se que, no solstício do sul, a órbita está em um ponto “mais alto”, causando a incidência em zênite dos raios do Sol no trópico de capricórnio e, no momento do solstício do norte, o planeta se posiciona em um ponto “mais baixo” do Sol, fazendo com que os raios incidam em zênite no trópico de câncer.

Para encontrar novas medidas na órbita terrestre, é necessário considerar a utilização da trigonometria. Partindo de dois dados, a medida da inclinação do eixo da Terra que é de  $23,43917^\circ$  e a distância entre a Terra e o Sol, na data do solstício de 21/06/2021, que era de, aproximadamente, 151.715.215,8746 km, para compor a hipotenusa.

Cabe destacar que o “trópico de câncer” do Sol tem também a declinação de  $23,43917^\circ$ , cujo ângulo formado com o seu “eixo” tem aproximadamente  $66,5608^\circ$ . Neste contexto, vale salientar que o cateto oposto à hipotenusa apresenta aproximadamente 139.196.116,6722 km de comprimento alinhado com o equador da Terra, até estar “em baixo” ou alinhado com o ponto exato do prolongamento (ou projeção) do “eixo” do Sol para o sul. Assim, o terceiro lado do triângulo mede aproximadamente 60.348.552,8513 km (desse mesmo ponto até o centro do Sol), conforme pode ser visto na Fig. 1.

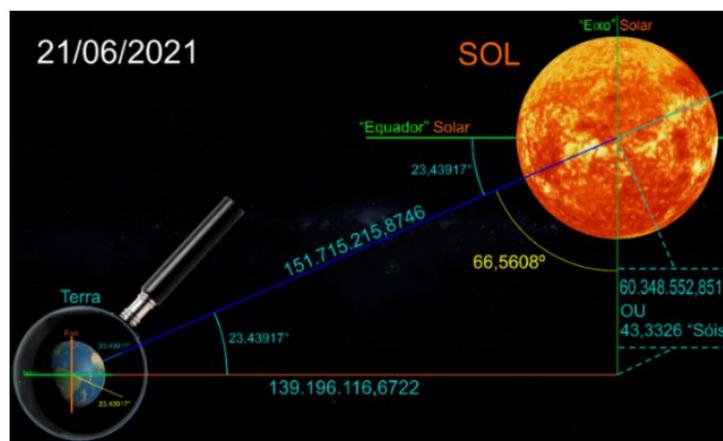


Figura 1: Posição da Terra em relação ao Sol em 21/06/2022 [1].

A partir da Fig. 1, nota-se que o cateto oposto dista 43,3326 vezes o diâmetro do Sol além do seu “equador”, uma vez que seu diâmetro é de 1392684 km. Sob esse aspecto, esse ponto é uma projeção do equador da Terra, que é conhecido como equador celeste.

Por razões análogas, a distância entre a Terra e o Sol na data do solstício de 21/12/2021 era de aproximadamente 147480559,1254 km, o que seria a outra hipotenusa do outro triângulo, composto pelo outro solstício. Nessas condições, o outro lado do triângulo retângulo determinado (cateto maior) possui um comprimento aproximado de 135310891,5053 km. Dessa forma, o cateto maior alinhado com “equador” do Sol se estenderia, tornando-se uma projeção do “equador” do Sol. Do ponto de vista de um observador da Terra, não é correto chamar de equador celeste, mas sim de “equador espacial do Sol”<sup>1</sup>, por ser uma projeção, já que a Terra agora localizada “acima” do Sol e “sobre” o “equador espacial do Sol”, encontra exatamente o ponto do prolongamento do eixo da Terra para o sul. O trecho assim percorrido perfaz o terceiro e menor lado com, aproximadamente, 58664111,3458 km, conforme pode ser visto na Fig. 2.

<sup>1</sup> Não existe este conceito em Astronomia.

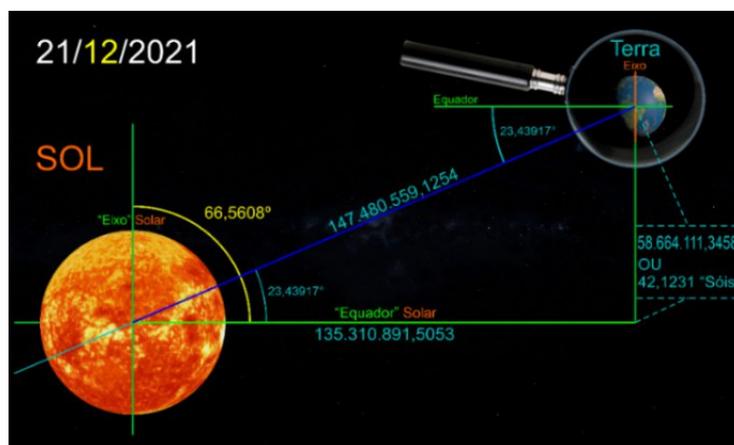


Figura 2: Posição da Terra em relação ao Sol em 21/12/2022 [1].

A distância ilustrada na Figura 2 demonstra que a Terra “sobrevoa” o Sol a uma “altura”, aproximadamente, 42,1231 vezes seu diâmetro e assinala o “trópico de câncer” no Sol também com a declinação de 23,43917°. Note-se que as palavras “acima” ou “abaixo” do Sol, ou “sobrevoa” e “mergulha” estão entre aspas, porque no espaço não existe o termo embaixo ou em cima. Essa orientação serve apenas para fins didáticos e para ajudar na compreensão das posições, e, também, pelo motivo de terem sido utilizadas, como orientação, as coordenadas da Terra. Sob esta perspectiva, as coordenadas da Terra normalmente são demonstradas com o norte virado para cima.

Obviamente, para tais considerações, é necessário se levar em conta que o “equador do Sol” é o ponto exato de onde vêm os raios que incidem em zênite na Terra nas datas dos equinócios de setembro e de março. Também é preciso assinalar que o “eixo” do Sol tem exatamente a mesma orientação que o eixo da Terra, de acordo com tais sugestões, conforme pode ser visto na Fig. 3.

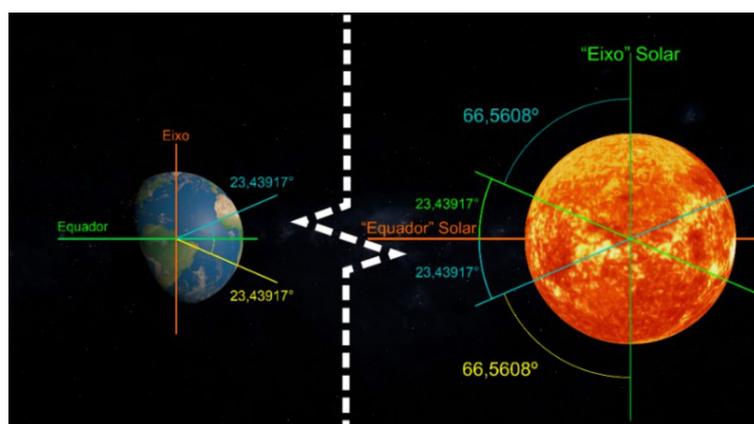


Figura 3: Posição da Terra em relação ao Sol nas datas dos equinócios [1].

Tais considerações de Coordenadas Heliométricas similares às das coordenadas geométricas (e, portanto, da Terra), têm, apenas, a finalidade na determinação da origem dos raios que atingem em zênite solar o planeta nas datas conhecidas (e coordenadas geométricas idem).

Para determinar as distâncias aproximadas nas datas dos solstícios e compor as hipotenusas na data do afélio, parte-se da distância conhecida de 152097701 km e, como o solstício ocorreu 14 dias antes do afélio, é necessário reduzir a distância. Como entre o afélio de 05/07/2021 e o periélio de 04/01/2022 tem um intervalo de 183 dias, subtraindo a distância do afélio pela do periélio, que também é conhecida e mede 147098074 km, encontram-se 4999627 km. Dividindo esse valor por 183, encontram-se 27320,3661 km e multiplicando-os por 14 chega-se ao resultado de 382485,1254 km. Dessa forma, esse último valor deve ser reduzido da distância conhecida do afélio e acrescentado à distância conhecida do periélio para compor as duas hipotenusas. Esse procedimento se justifica porque o periélio é a menor distância entre o planeta e o Sol, e o solstício ocorreu 14 dias depois do periélio<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Em verdade, neste ano foram 13 dias apenas. Assume-se o valor de 14 por ter sido um valor médio entre variações de 13 e 15 dias [1].

Em verdade, o valor da redução ou aumento diário de cada raio de aproximadamente 27320,3661 km é o valor médio e, caso fosse calculado exatamente e acrescentado em cada um dos menores até o último e maior dos 183 raios, daria no mesmo. É preciso lembrar também que os tamanhos da Terra e do Sol nas últimas três imagens não estão na proporção correta.

Segundo Athayde [1], um ponto curioso das Coordenadas Heliométricas é que, além de auxiliar a compreender as variações invertidas e normais dos períodos dos dias solares, demonstradas pelo autor [2], o total de deslocamento da Terra entre um solstício e outro é cerca de 119012786,0988 km. Isso resulta um pouco mais do que 85 vezes o diâmetro do nosso Sol de deslocamento total. Assim, levando-se em consideração de que o total do deslocamento é feito em, aproximadamente, seis meses, é possível chegar à velocidade média deste deslocamento pela obliquidade de, aproximadamente, 27171,8690 km/h. Como a velocidade média orbital é de cerca de 107302 km/h, existe uma Velocidade Harmônica ou razão harmônica entre elas de 3,9490, conforme destaca Athayde [3].

Assim a velocidade orbital média dividida pela velocidade média do deslocamento pela obliquidade entre solstícios (ou o deslocamento axial no sentido longitudinal) apresenta uma constante de 3,9490 [3]. Dessa forma, é possível um cilindro orbital real com faces perfeitamente circulares com a declinação aproximada de  $1,488^\circ$ , conforme demonstrado por Athayde [3].

A partir da Fig. 4 (projeção cilíndrica da órbita terrestre), é possível notar a existência de cinco pontos distintos de observação da órbita. A câmera 01 está posicionada perpendicularmente à órbita, ou seja, apresenta a mesma declinação que a órbita tem, de  $23,43917^\circ$  em relação ao plano do “cilindro” orbital. A câmera 02 está com uma declinação em relação à câmera 01 de  $1,488^\circ$ . Da mesma forma, a câmera 03 tem a mesma declinação da 02, só que para o sentido oposto. Enquanto a câmera 02 está mais próxima para o solstício de dezembro, a câmera 03 está mais inclinada para o lado do solstício de junho. Se a órbita for visualizada de qualquer uma das duas (02 e 03), tem-se uma órbita em formato de círculo perfeito. A câmera 04 é a que oferece o ponto de vista de cima do “cilindro” orbital e, portanto, sua declinação é de  $0^\circ$  em relação ao plano referido. Por fim, tem a câmera 05 com  $90^\circ$  de declinação, alinhada, portanto, com o plano do “cilindro” orbital.

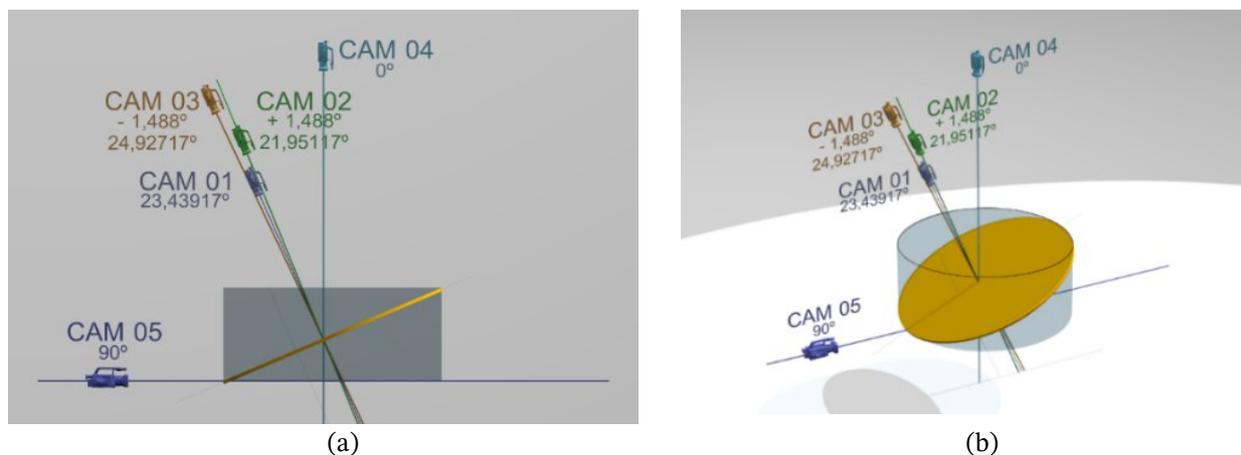


Figura 4: Visão: (a) Lateral e (b) Em perspectiva [1].

Note que são possíveis duas visualizações da órbita perfeitamente circular, dos pontos de vista oferecidos pelas câmeras 02 e 03. Por terem uma visão circular perfeita, obviamente a excentricidade do seu círculo visualizado é de 0 (zero).

Como a câmera 01 é perfeita e perpendicularmente alinhada com a órbita, se observada do seu ponto de vista, a excentricidade da nossa órbita será vista com, aproximadamente, 0,01671021925359741460252906311929. Por razões análogas, a excentricidade da nossa órbita, se vista da câmera 04, é de, aproximadamente, 0,246642 e a da câmera 05 é de, aproximadamente, 0,73122. Na Tabela 1, constam os dados de declinação e excentricidade em relação às câmeras utilizadas.

Tabela 1: Relações inclinação / excentricidade das câmeras [1]

Câmeras	Inclinação	Excentricidade
Câmera 01	23,43917°	0,01671
Câmera 02	21,95117°	0
Câmera 03	24,92717°	0
Câmera 04	0°	0,246642
Câmera 05	90°	0,73122

Na Tabela 2, são apresentadas as câmeras com suas declinações em relação ao plano do “cilindro” orbital e a excentricidade que a órbita da Terra apresentará, se vista por elas. Cabe ressaltar que os dados também podem ser organizados, a partir da declinação de 0° a 90°:

Tabela 2: Relações inclinação / excentricidade das câmeras [1]

Câmeras	Inclinação	Excentricidade
Câmera 04	0°	0,246642
Câmera 02	21,95117°	0
Câmera 01	23,43917°	0,01671
Câmera 03	24,92717°	0
Câmera 05	90°	0,73122

Como já mencionado, utilizou-se das aspas para a palavra “cilindro” orbital quando se referem ao sólido orbital imaginário, porque não existe uma denominação exata para um sólido de base elíptica. Dessa forma, sugere-se a expressão Orbitaedro (Orbitedro), Orbitindro ou Excentriciedro (Excentriedro) para esse sólido. Normalmente são conhecidos os sólidos geométricos (poliedros) ou sólidos de revolução (cilindro, cone, esfera). Neste caso, para as elipses, é impossível obter um sólido como o sólido orbital através da rotação.

Agora, se conhece a excentricidade do nosso Orbitaedro, que é de 0,246642, ou seja, é a excentricidade da nossa órbita se vista “de cima” em relação ao plano do Orbitaedro. Note-se que a visão da câmera da visão lateral encontra uma excentricidade bem maior, de 0,73122, dada a declinação da órbita de 23, 43917°.

Em trabalhos anteriores, foi desenvolvido um modelo para explicar a ocorrência da variação reversa dos dias solares, por meio de uma nova geometria orbital. Esse novo modelo orbital fornece uma nova harmonia matemática para todos os planetas do nosso sistema solar, uma vez que a mecânica newtoniana não explica, totalmente, os movimentos de Mercúrio.

Sob essa perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo demonstrar uma Nova Harmonia Matemática entre os planetas do nosso sistema solar, levando-se em consideração a inclinação dos eixos e a velocidade harmônica desses.

## 2 Abordagem Analítica

Para o estudo analítico da variação da velocidade harmônica dos planetas e sua inclinação em relação ao eixo de rotação, é necessário introduzir conceitos, definições e teoremas relacionados à curvatura de uma curva plana. Dessa forma, esta seção está subdividida em três subseções: na primeira, será feita uma abordagem sobre curvas planas; na segunda, será explanado sobre a reparametrização de uma curva pelo comprimento de arco; e, por fim, será apresentada a curvatura de uma curva.

### 2.1 Curvas Planas

Em uma definição comumente utilizada, uma curva plana é uma aplicação  $\alpha \rightarrow R^2$ , definida em um intervalo  $I \subset R$ . A aplicação  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , se cada função coordenada  $x, y: I \rightarrow R$  for uma função de classe  $C^k$ . O conjunto imagem  $C$  da aplicação  $\alpha$  é dado por  $C = \{(x(t), y(t)) ; t \in I\}$ , é chamado de traço de

$\alpha$ . De maneira bem simples, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo ou, ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano [4].

Seja  $\alpha: (a,b) \rightarrow R^n$  uma curva de classe  $C^1$  e  $a < a_0 < b$ ; a função comprimento de arco  $s: (a,b) \rightarrow R^n$ , com ponto base  $a_0$ , é definida pela Eq. (1)

$$s(t) = \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = \int_{a_0}^t \sqrt{\alpha'(r) \cdot \alpha'(r)} dr. \tag{1}$$

sendo o símbolo sobrescrito (') a primeira derivada em relação ao parâmetro t.

Nota-se que, se  $\alpha$  for regular, então  $s'(t) \neq 0, \forall t$ , o que se verifica pelo seguinte: como  $(a,b) \subset R$  e  $\|\alpha'(r)\|$  é uma função contínua de  $(a,b)$  em  $R$ , então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo  $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = \|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t, \in (a,b)$  [5].

### 2.2 Reparametrização pelo comprimento de arco

A função  $s(t)$ , descrita por meio da Eq. (1), possui a mesma classe de diferenciabilidade da curva  $\alpha$ , e, além disso,  $s(t)$  é injetiva<sup>3</sup>. Uma vez  $(c,d)$  sendo imagem de  $s(t)$ , a função (sobrejetiva) comprimento de arco  $s: (a,b) \rightarrow (c,d)$  é usada para obter uma reparametrização de uma curva regular  $\alpha$ , denotado por  $g: (c,d) \rightarrow (a,b)$  a função inversa de  $s$ , ou seja  $g(s(t)) = t, \forall t \in (a,b)$ , aplicando a regra da cadeia à igualdade  $s(g(s(t))) = s(t)$ , obtém-se  $g'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)}$ . Como  $\alpha$  é regular e  $s'(t) \neq 0, \forall t$ , pelo teorema da função inversa,  $g$  e  $s$  possuem a mesma classe de diferenciabilidade.

Seja  $\beta = \alpha \circ g(s)$  a reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, tem-se que a velocidade é descrita pela Eq. (2).

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t)\| \left| \frac{dg}{ds} \right| = \frac{1}{|ds/dt|} = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1 \tag{2}$$

Dessa forma, o vetor tangente  $\beta'(s)$  tem comprimento de arco 1 para todo (s).

### 2.3 Curvatura de uma curva

Dada uma curva plana parametrizada regular por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , o seu vetor velocidade  $\alpha'(t)$  forma um certo ângulo  $\theta(t)$  com a horizontal (eixo  $\overline{O_x}$ ), definindo a curvatura  $k$  de  $\alpha$  num determinado ponto, como a taxa de variação desse ângulo por unidade de comprimento medida, na curva  $\alpha$ . As Eqs. (3), (4) e (5) traduzem melhor esta afirmação em associação com a representação de uma curva por meio, conforme pode ser verificado na Fig. 5.

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \text{ ou } \theta = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \tag{4}$$

$$k = \frac{d\theta}{ds} \tag{5}$$

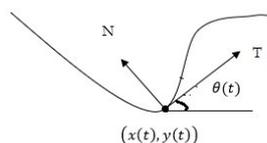


Figura 5 - Curva, velocidade e ângulo  $\theta$ .

<sup>3</sup> A demonstração desse resultado encontra-se na página 32 em [7].

Para calcular  $k$ , em função da parametrização, serão utilizadas as Eqs. (6), (7) e (8).

$$k = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\left(\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right)}{dt} \cdot \frac{1}{v} \tag{6}$$

$$k = \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{7}$$

$$k = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{8}$$

Em particular, pode-se observar que a definição de  $k$  depende, apenas, do formato da curva e não da velocidade em que é percorrida, ou seja, dada uma curva,  $k$  não depende da parametrização que foi escolhida.

Tendo em vista que toda curva plana  $\alpha$  é localmente o gráfico de uma função  $f: I \rightarrow R$ , ou seja,  $\alpha: \{(x, f(x)) \in R^2 | y = f(x)\}$ , dessa forma, é possível reescrever a Eq. (8) em outros termos conforme pode ser visto por meio da Eq. (9).

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \tag{9}$$

A Eq. (9) será utilizada como referência para a determinação do ponto crítico da curvatura do modelo de regressão desenvolvido para assim analisar a convexidade da curva em questão.

### 3 Materiais e métodos

As velocidades harmônicas dos outros planetas foram encontradas utilizando-se o mesmo método da obtenção da velocidade harmônica da Terra, descrito na introdução. Os dados utilizados, para o desenvolvimento do modelo de medição da velocidade harmônica em relação à inclinação dos eixos dos planetas, podem ser observados na Tabela 3. Sob este aspecto, é possível perceber que essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

Tabela 3: Dados dos planetas [1]

Planetas	Inclinação (°)	Massa (kg)	Velocidade harmônica média (km/s)
Mercúrio	0,034	$3,285 \cdot 10^{23}$	2766
Vênus	2,6	$4,867 \cdot 10^{24}$	34,6261
Júpiter	3,13	$1,898 \cdot 10^{27}$	28,7976
Urano	7,77	$8,681 \cdot 10^{25}$	11,6444
Terra	23,44	$5,972 \cdot 10^{24}$	3,9491
Marte	25,19	$6,39 \cdot 10^{23}$	3,7065
Saturno	26,73	$5,683 \cdot 10^{26}$	3,4782
Netuno	28,32	$1,024 \cdot 10^{26}$	3,2899

Note-se que de forma surpreendente os números harmonizam totalmente, vejamos alguns exemplos: A inclinação do eixo da Terra é praticamente o triplo da de Urano, que por sua vez é cerca do triplo da de Vênus. A velocidade harmônica de Vênus é praticamente o triplo da de Urano, que por sua vez é cerca do triplo da inclinação da Terra.

Mesmo Mercúrio, com seus dados muito diferentes harmoniza: Se dividirmos a inclinação de Mercúrio pela da Terra e multiplicarmos por cem, o resultado será 0,145051, ao passo que, se dividirmos a velocidade harmônica da Terra pela de Mercúrio e multiplicarmos por cem o resultado será 0,142772. Diversos outros exemplos estão publicados nos trabalhos anteriores.

Para a determinação do modelo matemático que melhor se ajusta aos dados, foi feita uma regressão não linear, cujos dados de entrada foram as inclinações em relação ao eixo de rotação e os dados de saída foram as velocidades

harmônicas. Dessa forma, o erro associado é minimizado através do método dos mínimos quadrados que podem ser vistos, através da formulação descrita na Eq. (10):

$$Erro = \int_0^n [V_{mod.}(x) - V_{tab.}(x)]^2 dx \quad (10)$$

em que  $V_{mod.}$  é a velocidade harmônica obtida pelo modelo desenvolvido, e  $V_{tab.}$  é a velocidade apresentada na tabela 1, e  $n$  a quantidade de dados fornecidos na tabela, que neste são 8.

Tendo em vista que os dados coletados não são contínuos, a Eq. (10) foi reescrita conforme pode ser visto por meio da Eq. (11)

$$Erro = \sum_{k=1}^n [V_{mod.}(x) - V_{tab.}(x)]^2 \quad (11)$$

Atrelado ao método dos mínimos quadrados, para avaliar se o modelo de regressão que representa a curva que descreve a velocidade harmônica em relação à inclinação desenvolvida está bem ajustada, foi tomado como referência o coeficiente de correlação de Pearson  $R^2$ . Sob esse aspecto, a correlação mensura a direção e o grau da relação linear entre duas variáveis quantitativas [6].

## 4 Resultados

### 4.1 Modelo de regressão desenvolvido

De posse dos dados da tabela 1, foi desenvolvida a curva que melhor se ajustou aos dados, conforme pode ser vista na Figura 6, assim como o modelo de regressão descrito, através da Eq. (12):

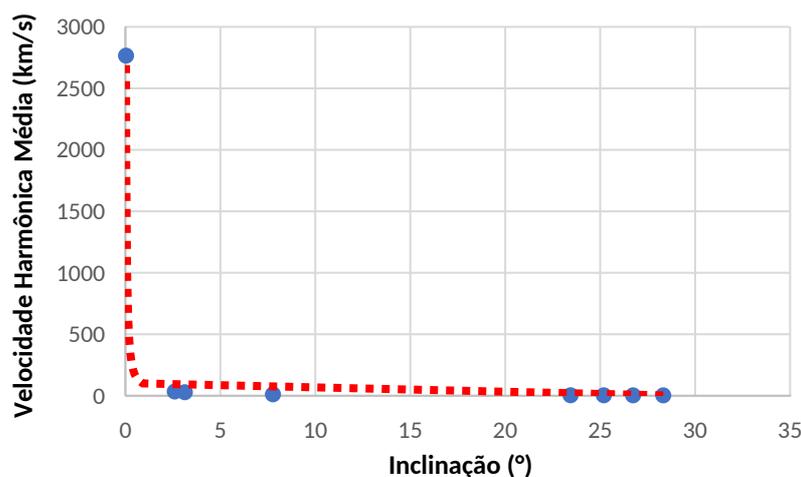


Figura 6: Curva de calibração: Inclinação versus Velocidade Harmônica Média.

$$V_{mod}(i) = 92,175 \cdot i^{-1,001} \quad (12)$$

em que  $i$  é a inclinação do planeta em relação ao eixo de rotação. Cabe destacar que a curva se ajustou bem aos dados, uma vez que o valor do  $R^2$  foi de 0,9999.

### 4.2 Ponto crítico da curva

Por meio do estudo da curvatura da Eq. (9), verificou-se que as coordenadas do ponto crítico encontradas são iguais a (9,594; 9,585). O interessante desse resultado é que, utilizando-se como referência uma aproximação para apenas uma casa decimal, tem-se que esse ponto pertence ao eixo de simetria relacionado ao primeiro e terceiro quadrante

do plano cartesiano. Como a inclinação de  $9,59^\circ$  determinada corresponde ao ponto crítico da curva, cabe destacar que essa inclinação corresponde ao ponto em que a curvatura da curva é máxima, ou seja, a circunferência que tangencia a curva nesse ponto possui raio mínimo, conforme pode ser visto na Fig. 7. É importante ressaltar que, como a velocidade de Mercúrio é muito elevada, e para fins didáticos, optou-se em não colocar esse planeta na Fig. 7, já que a ênfase maior nesta imagem é deixar claro onde fica localizado o ponto crítico da curva. Além disso, não seria interessante alterar a escala do gráfico, pois deformaria o círculo apresentado na figura e tal deformação pode comprometer a interpretação do leitor.

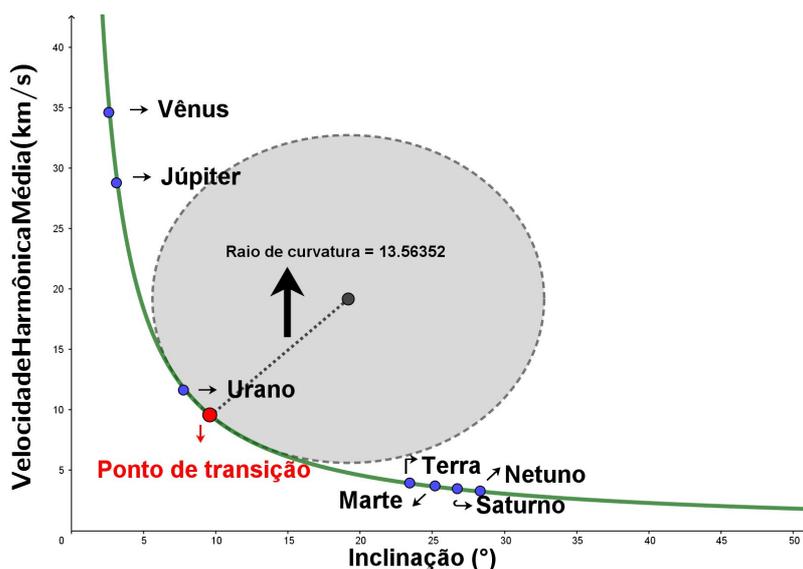


Figura 7: Ponto crítico da curva.

## 5 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo fazer o estudo analítico do problema da variação da velocidade harmônica dos planetas em relação à inclinação do eixo de rotação dos planetas. Para tanto, foi desenvolvido um modelo de regressão com os dados de velocidade harmônica e inclinação de cada planeta, para, posteriormente, analisar a curvatura da curva desenvolvida, a partir do modelo.

Nesse contexto, foi possível perceber uma boa aderência do modelo aos dados utilizados, uma vez que o modelo de regressão desenvolvido foi capaz de prever 99,99% das informações.

A partir da análise da curvatura da curva, verificou-se que a inclinação de  $9,59^\circ$  (ponto crítico) corresponde ao ponto de curvatura máxima da curva. Sob este aspecto, à medida que a inclinação supera esse ponto crítico, a velocidade harmônica diminui, chegando a tender a 0 (zero). Cabe ressaltar que, como os dados de Mercúrio são muito diferentes dos outros planetas, motivo pelo qual ele não pode ser descrito pela mecânica de Newton, ainda assim, estão perfeitamente harmonizados com os outros planetas do nosso sistema solar.

Como sugestão, para trabalhos futuros, serão analisados se o modelo desenvolvido se ajusta bem aos dados para outros corpos celestes, como os planetas anões e os cometas com trajetórias conhecidas.

## Referências

- [1] L. S. Athayde Junior, *New heliometric coordinates: a proposed theoretical model for elements of Earth's orbit geometry and for a new planetary harmony*, Chisinau, Moldova: Our Knowledge, 2023.
- [2] L. S. Athayde Junior, "The reverse variation of the solar day," *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, vol. 34, no. 1, pp. 163-167, 2023. Disponível em: <https://sab-astro.org.br/wp-content/uploads/2023/04/luiz.pdf>
- [3] L. S. Athayde Junior, "The New Planetary Harmony," *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, vol. 35, no. 1, pp. 172-173, 2024. Disponível em: <https://sab-astro.org.br/wp-content/uploads/2024/05/luiz.pdf>

- [4] J. P. F. Domingues, “Geometria Diferencial das Curvas Planas,” Dissertação de mestrado, PROFMAT – UNESP, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil, 2013.
- [5] H. Alencar, W. Santos, e G. Silva Neto, *Geometria diferencial de curvas no  $R^2$* , Coleção Coletâneas de Matemática, 1a ed., Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.
- [6] D. B. F. Filho e J. A. Silva Junior, “Desvendando os Mistérios do Coeficiente de Correlação de Pearson ( $r$ ),” *Revista Política Hoje*, vol. 18, no. 1, pp. 115–146, 2009.