SOBRE O USO DE SENSORES DE DEFLEXÃO PARA ESTIMAR A DINÂMICA DE UMA LÂMINA FLEXÍVEL

Bellicanta, L.S.*, Gomes, S.C.P.

Instituto de Matemática Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande
Av Itália, Km 8, Rio Grande-RS Brasil, 96201-900

Abstract

This article is a theoretical and experimental study of the dynamics of flexible beams coupled to an actuator of the type *harmonic drive*. As a main result we present a technique that allows, from the data provided by some deflection sensors installed on the beam, to estimate the position, the deflection and also other quantities related to the dynamics of the system at any other point of the beam. Experimental tests were performed and demonstrate the excellent performance of this technique.

Keywords: Flexible beams, deflection sensors.

Resumo

Este artigo é um estudo teórico e experimental da dinâmica de uma lâmina flexível acoplada a um atuador do tipo *harmonic drive*. Como resultado principal, é apresentada uma técnica que permite, a partir dos dados fornecidos por alguns sensores de deflexão instalados na lâmina, estimar a posição, a deflexão e ainda outras quantidades relacionadas com a dinâmica do sistema, em qualquer outro ponto da lâmina. Testes experimentais foram realizados e comprovam o excelente desempenho desta técnica.

Palavras chaves: Lâmina flexível, sensores de deflexão.

* Corresponding authors: leandrobellicanta@furg.br Phone: +5553 3233 6903

1 Introdução

Atualmente há um crescente interesse no controle de estruturas flexíveis, como, por exemplo, o controle de robôs com elos flexíveis. O objetivo maior é conseguir atenuar vibrações de forma ativa, a partir de uma lei de controle que também realize o posicionamento dinâmico do sistema. Nestes casos, o sistema de controle é dito não colocado, ou seja, o atuador encontra-se numa extremidade do elo flexível e deseja-se atenuar as vibrações na outra extremidade livre (efetuador final), havendo, portanto, toda uma dinâmica flexível entre o local da aplicação do esforço de controle e o efetuador final [1]. A complexidade dinâmica de tais sistemas flexíveis gera desafios científicos tanto no projeto de controle quanto na modelagem dinâmica. Nos últimos vinte anos surgiu uma grande quantidade de artigos abordando principalmente o controle de estruturas flexíveis [2], [3]. Os artigos que tratam exclusivamente da modelagem dinâmica são bem mais raros. Pereira [4] abordou nesta dissertação alguns dos principais formalismos para modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, tendo informado que o formalismo Modal Analítico é o mais utilizado na robótica flexível.

O presente artigo apresenta uma nova contribuição ao estudo analítico de uma estrutura flexível do tipo lâmina, acoplada em uma extremidade a um atuador robótico e livre na sua outra extremidade. Tomando-se como base a solução analítica do modelo, o formalismo proposto permite prever a posição, a deflexão angular e a força de cisalhamento em qualquer ponto da estrutura flexível do tipo lâmina. Resultados experimentais obtidos com um manipulador robótico visto na Fig. 1 permitiram validar o formalismo proposto.

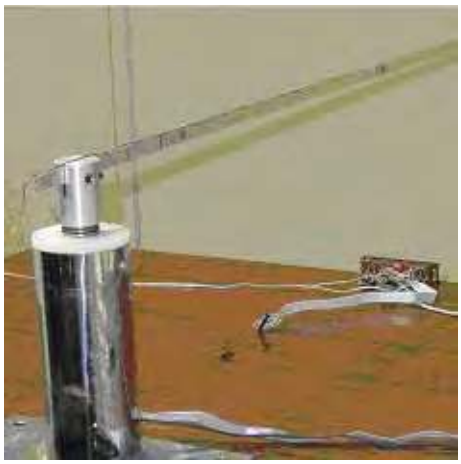


Figura 1: Imagem do sistema lâmina-rotor usado nos experimentos.

2 Modelo Dinâmico de uma Lâmina Flexível

2.1 As Equações do Modelo Lâmina-Rotor

O manipulador robótico (ver figura 2) com um único elo flexível estudado neste artigo foi modelado, conforme grande parte da literatura [5], [6], [7], pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais (EDP):

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = -\rho x\ddot{\theta}(t) \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = I_r\ddot{\theta}(t) - \tau_m(t) \tag{2}$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0, \quad & \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0, \quad & \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde E representa o módulo de Yung, I a inércia a seção reta da lâmina, L é o comprimento da lâmina, $\tau_m(t)$ é o torque aplicado pelo motor, $\theta(t)$ é o ângulo que a linha do modo rígido da lâmina faz com uma direção fixa de referência, I_r é a inércia do rotor, ρ é a densidade linear da lâmina e $w(x,t)$ representa a distância da linha do modo rígido até um ponto x da lâmina no tempo t.

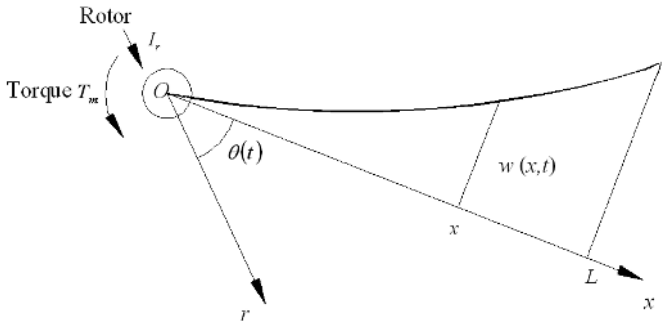


Figura 2: Representação geométrica do modelo lâmina-atuador.

Para resolver o sistema (1), considera-se o mesmo como uma equação diferencial parcial linear (EDP) não-homogênea com as condições de contorno homogêneas (3).

Para o uso da técnica proposta neste artigo, faz-se necessário calcular as chamadas *funções de forma* da lâmina, que são parte da solução analítica da equação homogênea associada à equação (1).

2.2 Cálculo das funções de forma

A EDP homogênea associada a equação (1) é

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0 \tag{4}$$

com as condições de contorno (3).

Supondo-se $w(x,t) = X(x)T(t)$, (usando-se a técnica de separação de variáveis [7]), a equação (4) implica nas equações seguintes

$$\frac{\ddot{T}(t)}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)T(t)} = -\frac{X''''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

onde λ é uma constante.

Para a função $X(x)$, obtém-se o problema de auto-valores

$$X'''' - \lambda X = 0 \tag{5}$$

com as condições de contorno

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \tag{6}$$

$$X''(L) = 0, \quad X'''(L) = 0. \tag{7}$$

A solução geral da equação (5) tem a forma

$$X(x) = A\cosh\sqrt[4]{\lambda}x + B\ \text{senh}\ \sqrt[4]{\lambda}x + C\cos\sqrt[4]{\lambda}x + D\ \text{sen}\ \sqrt[4]{\lambda}x.$$

Das condições $X(0) = 0$ e $X'(0) = 0$ resulta que $C = -A$ e $D = -B$. Portanto,

$$X(x) = A(\cosh\sqrt[4]{\lambda}x - \cos\sqrt[4]{\lambda}x) + B(\text{senh}\sqrt[4]{\lambda}x - \text{sen}\sqrt[4]{\lambda}x).$$

Das condições $X''(L) = 0$ e $X'''(L) = 0$ resulta o sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} A(\cosh \sqrt[4]{\lambda}L + \cos \sqrt[4]{\lambda}L) + B(\operatorname{senh} \sqrt[4]{\lambda}L + \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}L) = 0 \\ A(\operatorname{senh} \sqrt[4]{\lambda}L - \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}L) + B(\cosh \sqrt[4]{\lambda}L + \cos \sqrt[4]{\lambda}L) = 0 \end{cases}$$

Este sistema homogêneo só possui soluções não triviais A e B se o seu determinante se anular, isto é, se λ satisfizer à equação

$$\cosh(\mu)\, \cos(\mu) = -1. \qquad \mu = \sqrt[4]{\lambda}L.$$

Esta equação possui infinitas raízes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n, ...$ Nota-se que

$$\sqrt[4]{\lambda_i} = \frac{\mu_i}{L}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se as equações

$$\begin{aligned} \frac{d^4X}{d^4x} - \lambda_n X = 0, \\ \ddot{T} + \frac{EI}{\rho}\lambda_n T = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

cuja solução da primeira possui a forma

$$X_n(x) = A_n(\cosh \sqrt[4]{\lambda_n}x - \cos \sqrt[4]{\lambda_n}x) + B_n(\operatorname{senh} \sqrt[4]{\lambda_n}x - \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda_n}x),$$

onde as constantes A_n e B_n são as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} A_n(\cosh \sqrt[4]{\lambda_n}L + \cos \sqrt[4]{\lambda_n}L) + B_n(\operatorname{senh} \sqrt[4]{\lambda_n}L + \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda_n}L) = 0 \\ A_n(\operatorname{senh} \sqrt[4]{\lambda_n}L - \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda_n}L) + B_n(\cosh \sqrt[4]{\lambda_n}L + \cos \sqrt[4]{\lambda_n}L) = 0 \end{cases}$$

obtido de $X_n''(L) = 0$ e $X_n'''(L) = 0$. Resolvendo-se tais sistemas resulta

$$B_n = A_n \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[4]{\lambda_n}L) - \operatorname{senh}(\sqrt[4]{\lambda_n}L)}{\cos(\sqrt[4]{\lambda_n}L) + \cosh(\sqrt[4]{\lambda_n}L)}$$

Usa-se $A_n = \frac{1}{L}$ pois, assim,

$$\int_0^L X_i(x)X_j(x)\, dx = \delta_{ij}, \tag{9}$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Em outras palavras, as autofunções X_n ficam

ortonormais.

2.3 Soluções para a EDP não-homogênea.

Procura-se soluções para (1), com as condições de contorno (3) que possuam a forma

$$w(x,t) = \sum u_n(t) X_n(x). \tag{10}$$

Observa-se que as expressões analíticas das funções $u_n(t)$ são, na prática, impossíveis de serem encontradas. Estas funções dependem das condições iniciais

$$w(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

as quais, em geral, não se tem acesso. Estas funções representam os perfis de posição e velocidade de todos os pontos da lâmina em $t = 0$. Além disso, as funções $u_n(t)$ dependem do torque $\tau_m(t)$ aplicado pelo rotor do atuador e do atrito neste atuador, cujo modelo dinâmico é de difícil determinação. A técnica apresentada neste artigo possibilita, em última análise, a recuperação das funções $u_n(t)$, para $1 \leq n \leq k$ a partir da leitura de k sensores de deflexão instalados ao longo da lâmina. De posse das funções u_n tem-se como reconstruir os k primeiros modos de vibração da função deflexão $w(x,t)$, isto é

$$w(x,t) \cong \sum_{n=1}^{k} u_n(t) X_n(x).$$

Para efeitos práticos de simulação e controle, por exemplo, apenas os primeiros modos de vibração são de interesse, já que os sensores utilizados para medir o sistema têm precisão limitada bem como os atuadores usados para controlar o sistema não funcionam para frequências acima de uma determinada faixa.

3 Resultado principal

Nesta seção descreve-se uma técnica que permite, a partir dos dados obtidos por k sensores de deflexão, estimar a leitura dos k primeiros modos de vibração da lâmina. Observa-se que o método apresentado neste artigo se aplica a qualquer lâmina flexível modelada por uma EDP do tipo (1).

Segundo o modelo usado neste artigo, um sensor de deflexão $s_x(t)$ localizado em um ponto fixo x da lâmina obteria o seguinte sinal:

$$s_x(t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 x} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)\, X_i''(x). \tag{11}$$

Considere-se k sensores de deflexão $s_1, s_2, ..., s_k$, com $k \geq 2$ situados nos pontos $x_1, x_2, ..., x_k \in (0, L)$. Suponha-se que estes sensores foram projetados para captar apenas os primeiros k modos naturais de vibração da lâmina. Isto pode ser facilmente implementado adaptando-se um filtro de frequência passa baixa nos sinais $s_i(t)$, por exemplo.

Com estas hipóteses, a partir da expansão (11), pode-se escrever

$$\begin{aligned} s_1(t) &= X_1''(x_1)u_1(t) + ... + X_k''(x_1)u_k(t) \\ s_2(t) &= X_1''(x_2)u_1(t) + ... + X_k''(x_2)u_k(t) \\ &\vdots \\ s_k(t) &= X_1''(x_k)u_1(t) + ... + X_k''(x_k)u_k(t) \end{aligned} \tag{12}$$

já que os sensores captam apenas os k primeiros modos de vibração.

Usando-se a notação matricial, pode-se escrever o sistema (12) de forma compacta como

$$\vec{s}(t) = A\,\vec{u}(t)$$

onde,

$$\begin{aligned} \vec{s}(t) &= (s_1(t), s_2(t), ..., s_k(t))^T, \\ \vec{u}(t) &= (u_1(t), u_2(t), ..., u_k(t))^T \quad \text{e} \\ A &= (X_j''(x_i))_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, ..., k\}. \end{aligned}$$

Como as funções $X_j(x)$ são ortogonais, sempre é possível escolher os pontos x_i de tal forma que a matriz A seja inversível e, portanto, tem-se que

$$\vec{u}(t) = A^{-1}\,\vec{s}(t) \tag{13}$$

A igualdade (13) mostra como pode ser obtida a função vetorial $\vec{u}(t)$ a partir dos sensores $\vec{s}(t)$. De posse das funções u_i pode-se estimar diversas variáveis relacionadas com a dinâmica da lâmina, tais como a variação da posição de qualquer dos pontos da lâmina, a variação da deflexão em qualquer dos pontos da lâmina, a força de cizalhamento, etc...

Abaixo explicita-se as funções que definem estas variáveis:

- Posição do ponto x_0 da lâmina no tempo t :

$$w(x_0, t) \simeq \sum_{i=1}^{k} X_i(x_0) u_i(t).$$

- A força de cisalhamento que atua no ponto x_0 no tempo t :

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x_0, t) \simeq \sum_{i=1}^{k} X_i'(x_0) u_i(t).$$

- A deflexão no ponto x_0 da lâmina no tempo t :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, t) \simeq \sum_{i=1}^{n} X_i''(x_0) u_i(t).$$

4 Experimentos

Uma série de experimentos foram realizados com o Robô Flexível construído no NuMA (IMEF-FURG), afim de verificar a eficiência da técnica apresentada na seção anterior. A figura 3 mostra um esquema do suporte experimental (robô flexível) usado nos experimentos.

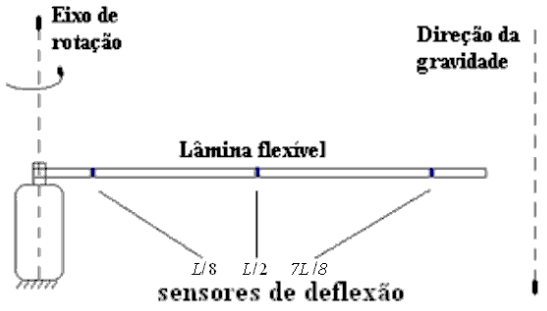


Figura 3: Representação esquemática do sistema lâmina-rotor-sensores usado nos experimentos.

Para validar as estimativas de deflexão, usam-se os sinais de dois dos sensores de deflexão e estima-se a deflexão no ponto onde está instalado o terceiro sensor. Este valor predito a partir da técnica proposta neste artigo é comparado com o sinal experimental proveniente do terceiro sensor. Os sensores foram projetados com strain-gauges de 350

ohms que foram colados aos pares, em cada um dos três pontos específicos da lâmina flexível. Dados técnicos destes sensores podem ser encontrados em [8]. A seguir são apresentados os gráficos relativos à validação experimental.

As figuras 4, 5 e 6 mostram a comparação entre o sinal medido pelo sensor de deflexão em uma determinada posição e o sinal simulado usando como entrada os outros dois sensores. Em cada figura, o gráfico de baixo é uma pequena parte do gráfico de cima e podemos observar a quase coincidência entre a simulação e o sinal captado pelo sensor. Nestas figuras, a lâmina foi posta em movimento a partir de uma pancada na extremidade livre (impulso externo).

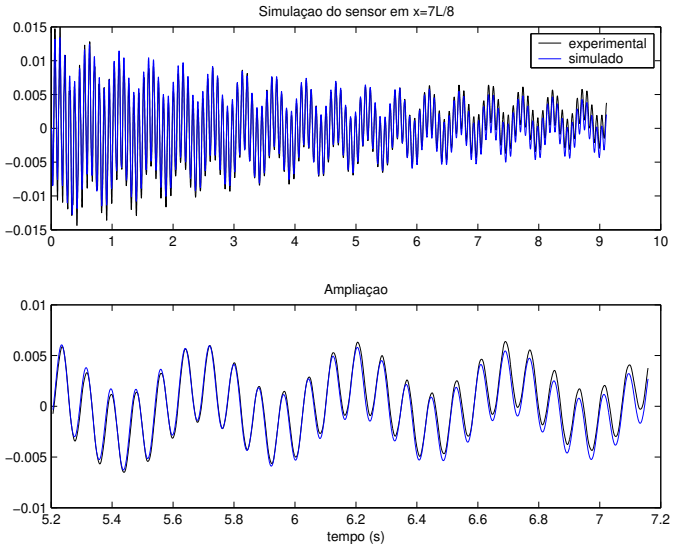


Figura 4: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{7L}{8}$ e a deflexão estimada.

Nas figuras 7, 8 e 9, a lâmina foi posta em movimento pelo rotor, com um torque senoidal. Também neste caso pode-se observar a quase coincidência entre a simulação e o sinal captado pelo sensor.

Nas figuras 11 e 10, a lâmina foi posta em movimento com um torque em forma de pulso. Nestas figuras, o gráfico de baixo representa o pulso aplicado pelo rotor na extremidade fixa da lâmina. É importante ressaltar que na figura 10, durante os primeiros instantes, pode-se observar uma diferença significativa entre o sinal simulado e o sinal experimental. Isto acontece pois, com o torque aplicado, o sensor posicionado em $\frac{L}{2}$ ultrapassou o limite da sua faixa de funcionamento e saturou o sinal. Observa-se que o sinal simulado é mais plausível que o próprio sinal obtido pelo sensor, evidenciando como esta técnica pode ser usada para reconstruir dados de deflexão em locais onde a deflexão ultrapassa a faixa de atuação do sensor.

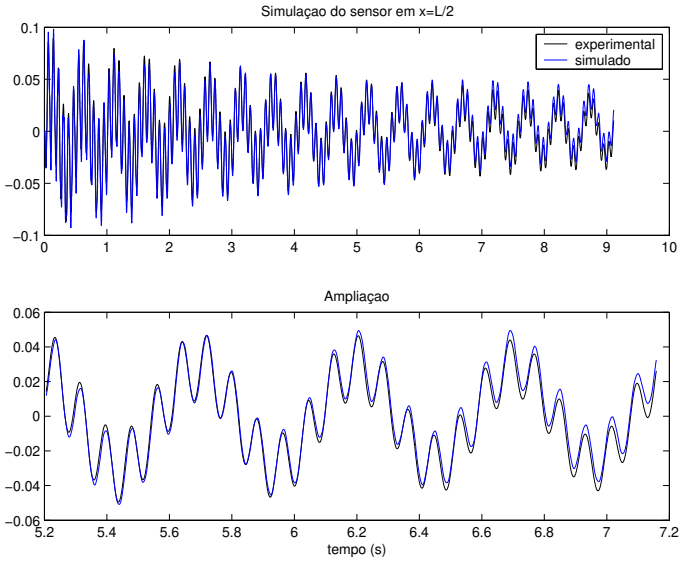


Figura 5: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{2}$ e a deflexão estimada.

5 Conclusões

Neste artigo desenvolveu-se uma técnica que permite estimar com grande precisão a posição, a deflexão e a força de cisalhamento em um ponto qualquer de uma lâmina flexível. Para construir estas estimativas usou-se, como dados de entrada, o sinal captado por um número finito de sensores de deflexão instalados ao longo da lâmina. Esta técnica é relativamente simples e pode ser usada, por exemplo, para fins de controle da estrutura, já que o projeto do controlador pode contar com a medida da posição, da deflexão e da força de cisalhamento em quaisquer pontos da lâmina, aumentando assim consideravelmente as possibilidades de leis de controle.

Referências

[1] S. C. P. Gomes, V. S. Rosa, and B. C. Albertini, “Active control to flexible manipulators,” *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 11(1), pp. 75–83, 2006.

[2] D. X. P. Cheng, “End-point control of a flexible structure mounted manipulator based on wavelet basis function networks,” in *IEEE IROS Work Shop on Robot Vision for Space Application*, 2005.

[3] I. A. Mahmood, S. O. R. Moheimani, and B. Bhikkaji, “Positioning of a flexible manipulator using resonant control,” *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 13(2), 2008.

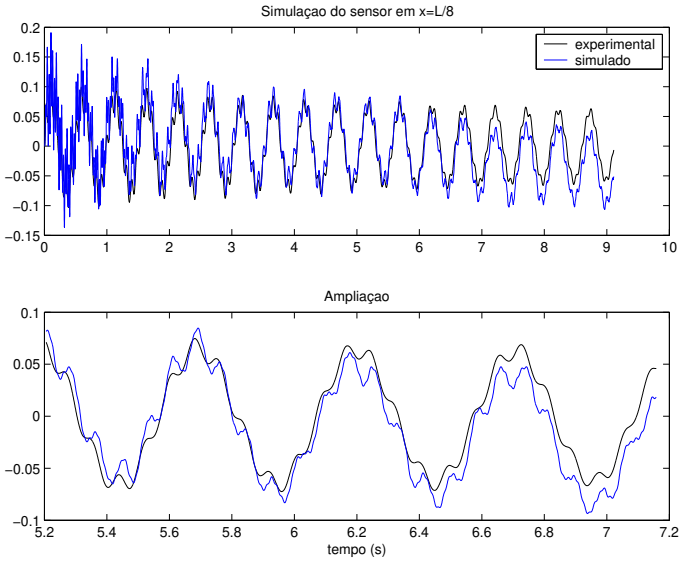


Figura 6: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{8}$ e a deflexão estimada.

[4] A. E. L. Pereira, “Um estudo sobre modelagem matemática de estruturas flexíveis,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1999.

[5] Z.-H. Luo and D.-X. Feng, “Nonlinear torque control of a single-link flexible robot,” *Journal of Robotics Systems*, vol. 16(1), pp. 25–35, 1999.

[6] R. H. C. Jr. and E. Schimitz, “Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot,” *Int. J. Robotics Res.*, vol. 3(3), pp. 62–75, 1984.

[7] A. Tjonov and A. Samarsky, *Equaciones de la Fisica Matemática*. Moscu: MIR, 1980.

[8] Strain gage assessoria em extensometria. [Online]. Available: http://www.straingage.com.br/cod.htm

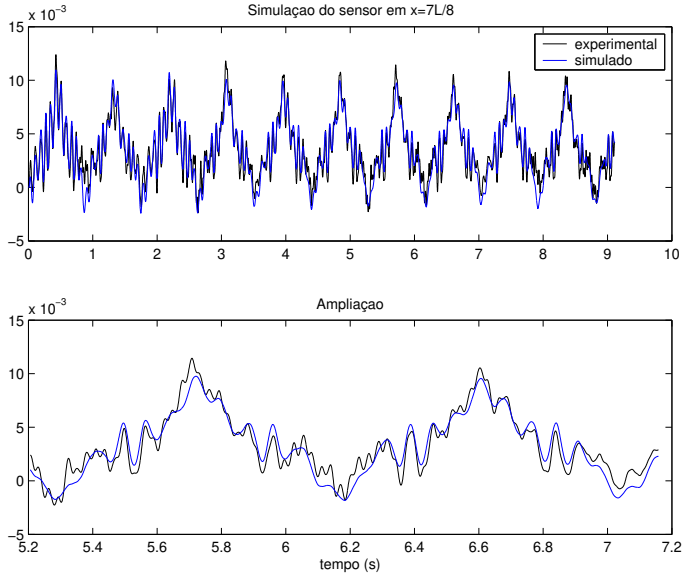


Figura 7: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{7L}{8}$ e a deflexão estimada com torque senoidal.

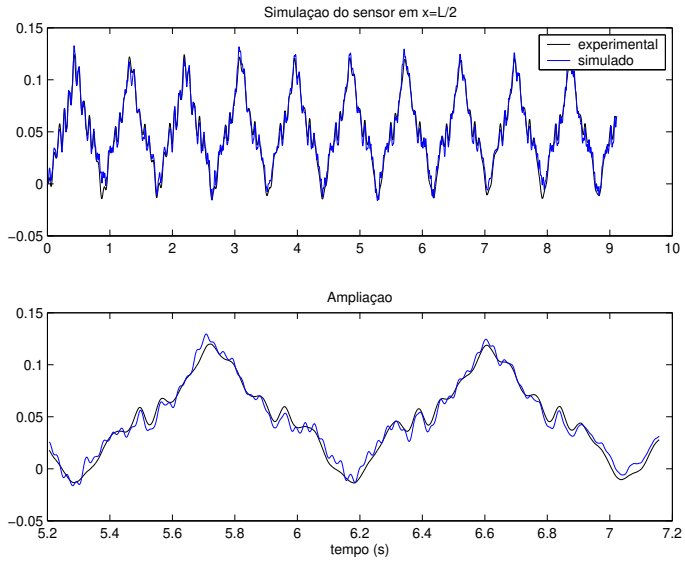


Figura 8: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{2}$ e a deflexão estimada com torque senoidal.

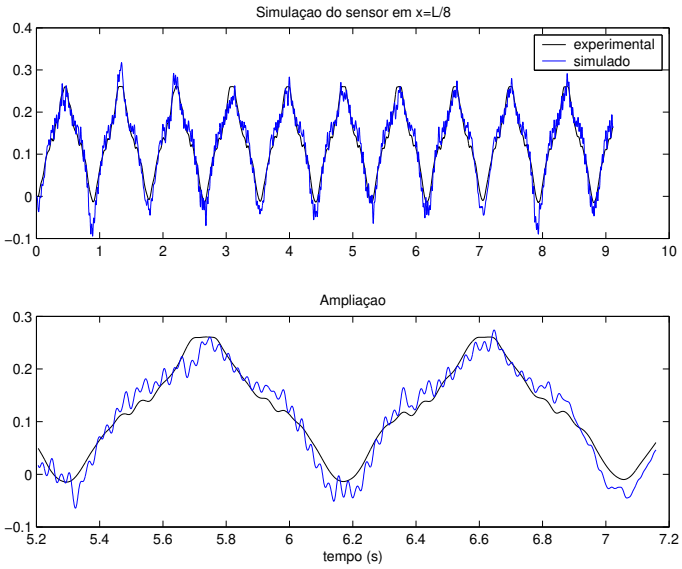


Figura 9: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{8}$ e a deflexão estimada com torque senoidal.

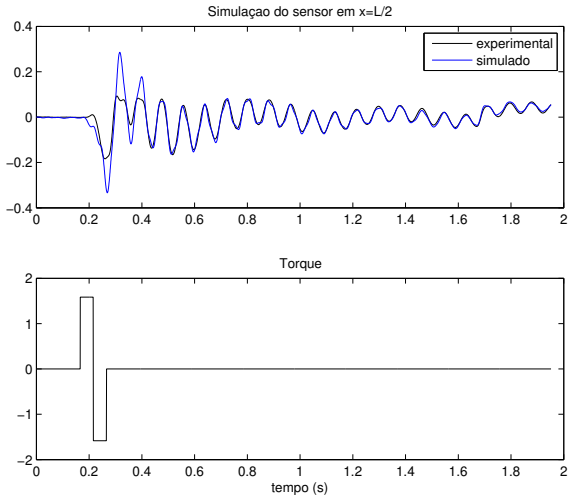


Figura 10: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{2}$ e a deflexão estimada com torque inicial em forma de pulso.

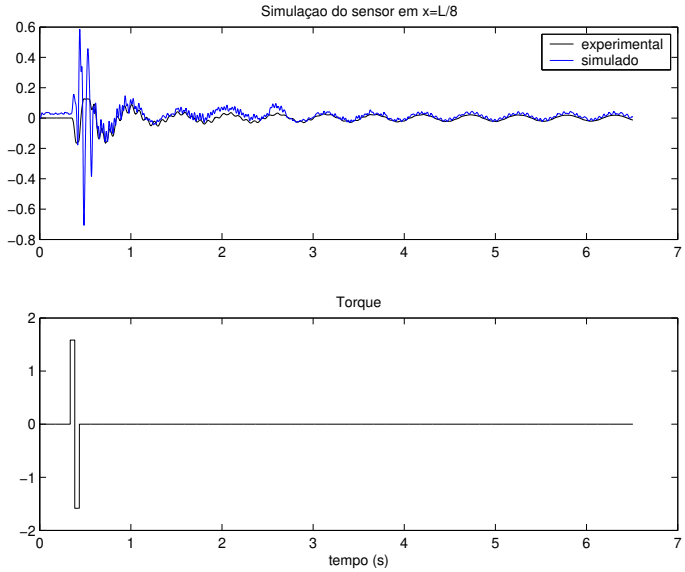


Figura 11: Comparação entre a deflexão medida pelo sensor posicionado em $\frac{L}{8}$ e a deflexão estimada com torque inicial em forma de pulso.