MODELAGEM DO FLUXO DE TRÁFEGO VEICULAR: MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS E SIMULAÇÃO DIRETA DE MONTE CARLO

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO[1], ADRIANA LUIZA DO PRADO[2], ELOY KAVISKI[3], LILIANA MADALENA GRAMANI[2], MARINA V. FERREIRA[4]

[1]UTFPR-Campus Campo Mourão, alobeiro@utfpr.edu.br
[2]DMAT, UFPR, alprado@ufpr.br, l.gramani@gmail.com
[3]DHS, UFPR, eloy.dhs@ufpr.br
[4]PPGMNE, UFPR, marina.v.ferreira@hotmail.com

RESUMO

O fluxo de tráfego veicular pode ser observado e representado em diferentes escalas. Comparações dos resultados do método matemático (MVF) e o método computacional (DSMC) são realizadas. Neste trabalho apresenta-se a modelagem matemática do tráfego veicular em escala cinética para uma pista com condições de contorno periódicas

PALAVRAS-CHAVES: Escalas de representação, Método dos Volumes Finitos, Simulação Direta de Monte Carlo.

ABSTRACT

The flow of vehicular traffic can be observed and represented at different scales. Comparisons of results of mathematical method (FVM) and the computational method (DSMC) are performed. This work presents the mathematical modeling of kinetic-scale vehicular traffic to one lane with periodic boundary conditions.

KEY WORDS: Scales of Representation, Finite Volume Method, Direct Simulation Monte Carlo.

I. INTRODUÇÃO

O fluxo de tráfego veicular pode ser observado e representado em diferentes escalas: (i) Microscópica observa os veículos identificados individualmente e os modelos matemáticos nesta escala são baseados na mecânica newtoniana. (ii) Macroscópica utiliza o estado do sistema por quantidades médias como variáveis dependentes do tempo e do espaço com representação semelhante à hidrodinâmica. (iii) Cinética utiliza o estado do sistema identificado pela posição e pela velocidade dos veículos. Os modelos utilizam uma estrutura tipo Boltzmann.

Vários livros tratam deste assunto podendo o leitor encontrar uma valiosa referência da física do tráfego no livro do Kerner [6], para os modelos cinéticos em Prigogine e Herman [10], para os modelos microscópicos em Leutzbach [8], e também em artigos como os de Klar, Kühne e Wegener [7] e de Bellomo, Delitala e Coscia [1]. Por outro lado, a modelagem existente ainda não representa de forma completamente satisfatória a descrição do tráfego real.

Neste artigo apresenta-se a modelagem matemática do tráfego veicular em escala cinética para o caso não-espacialmente homogêneo. Usamos uma equação tipo Boltzmann. As soluções numéricas do sistema são obtidas pelo modelo matemático de velocidades discretas, cujas interações entre os veículos são avaliadas através de uma tabela de jogos, determinadas pelo método dos volumes finitos. O principal objetivo deste trabalho é comparar os resultados dos métodos matemático (MVF) e computacional (DSMC).

O artigo está organizado em mais três seções as quais são brevemente descritas abaixo:

- Seção 2 introduz a descrição do fluxo de trafego veicular através de uma estrutura matemática para uma pista.
- Seção 3 introduz as equações de evolução.
- Seção 4 apresenta o método dos volumes finitos e os conceitos básicos do método de simulação direta de Monte Carlo. A comparação entre esses resultados e a conclusão é apresentada.

2. A DESCRIÇAO DO FLUXO DE TRÁFEGO

Nesta seção detalha-se a descrição cinética do fluxo de tráfego veicular ao longo de uma pista e introduz as quantidades fenomenológicas. Todas as variáveis dependentes que descrevem o fluxo de tráfego são dimensionais e seus valores normalizados no intervalo [0,1].

As seguintes quantidades de referências são introduzidas: L é o comprimento da pista, V_M é a velocidade máxima (a velocidade de um veículo isolado movendo-se em condições de tráfego livre), $\overline{\rho}_M$ é a densidade máxima de veículos que a pista suporta.

Com base nas quantidades dimensionais acima, as seguintes variáveis adimensionais são introduzidas: x é a posição referida do veículo a L, t é o tempo normalizado representado L/V_M, $v = V/V_M$ é a velocidade referida a V_M e $\rho = \overline{\rho}/\overline{\rho}_M$ é a densidade de veículos referida as quantidades máximas.

O método da teoria cinética discreta será aplicado na modelagem do fluxo de tráfego utilizando-se uma discretização da velocidade na forma:

$$0 = v_1 < v_2 < v_3 < \cdots < v_{n-1} < v_n = 1, \tag{1}$$

referindo-se ao domínio $D_v = [0,1]$. Assume-se que a velocidade é representada por um número finito de classes. O modelo das velocidades discretas para o fluxo de veículos com mesma probabilidade de acontecerem é proposto por Coscia [3] e Delitala e Tosin [4], ou seja, os veículos que trafegam ao longo da pista tendem a se moverem em grupos com velocidade discreta. Coscia [3] admite que as velocidades destes grupos v_i, dependem das condições medias locais do tráfego via densidade macroscópica ρ.

Delitala e Tosin [4] sugerem que seja fixado uma grade da velocidade com n partições, $v_i = i/n$, onde os valores de v_i são constantes com relação ao tempo e ao espaço, em particular, isto significa que globalmente o conjunto de velocidades poderá ser obtido sem a influência das condições de tráfego. Com base nesta hipótese a evolução no tempo e no espaço do fluxo de tráfego em uma pista é representada pela função de distribuição f como uma combinação linear de n funções delta de Dirac na variável v, como segue:

$$f(x,t,v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)\ \delta_{v_i}(v), \tag{2}$$

em que f_i, $i = 1,2,..,n$ denota o número de veículos com velocidade v_i.

As quantidades macroscópicas, tais como a densidade e o fluxo, são funções derivadas da função de distribuição f, representadas por:

(i) a densidade de veículos $\rho(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t),\ \text{com}\ \rho \in [0,1]$, (3)

(ii) o fluxo de veículos $q(x,t) = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i(x,t),\ \text{com}\ q < 1$. (4)

3. AS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

Nesta seção o fluxo de tráfego veicular é descrito, em geral, pela a equação de evolução representada por:

$$\partial f_i / \partial t + v_i\ \partial f_i / \partial x = G_i - L_i, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{5}$$

As equações diferenciais parciais do sistema (5) para as funções de distribuição $f_i(t,x),\ i = 1,...,n$ são compostas por quatro termos, denominados: taxa de variação temporal $\partial f_i / \partial t$, transporte convectivo $v_i\ \partial f_i / \partial x$ e termos de ganhos G_i e de perdas L_i, sendo que a diferença entre os termos de ganhos e perdas denomina-se de termo de fontes.

Essas interações são distribuídas sobre uma zona de visibilidade com comprimento característico $\xi > 0$, ou seja, um veículo localizado em uma posição x é supostamente afetado por outros veículos que se encontram dentro desta zona de visibilidade. Três categorias de veículos são consideradas:

(i) o veículo candidato (v_h): é a velocidade do veículo que após uma interação com um veículo de mesma velocidade ou velocidade diferente poderá ou não alterar a sua velocidade final.

(ii) o veículo campo (v_k): é a velocidade do veículo com o qual o veículo candidato interage.

(iii) o veículo teste (v_i): é a velocidade do veículo após a interação do veículo candidato com o veículo campo.

Considerando o trabalho [4] a estrutura matemática para o caso não - espacialmente homogêneo é:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{hk}[\rho] A_{hk}^{i} f_h(t,x) f_k(t,x) - f_i(t,x) \sum_{k=1}^{n} \eta_{hk}[\rho] f_k(t,x) . \quad (6)$$

Este modelo é caracterizado pelas seguintes quantidades:

(1) $\eta_{hk}[\rho] = c_0 / 1-\rho$, é a razão entre o número de interações por unidade de tempo entre os veículos com velocidade v_h e v_k . As interações são distribuídas sob um comprimento característico (ou zona de visibilidade) $\xi > 0$, entretanto supõe-se que as interações ocorrem com maiores ou menores frequência de acordo com o comprimento de $\xi > 0$. Espacialmente, η_{hk} é estimado via a quantidade $1-\rho$ em que c_0 é uma constante.

(2) A_{hk}^{i} define a densidade de probabilidade que o veículo candidato com velocidade v_h ajusta a sua velocidade para v_i depois de interagir com um veículo trafegando com velocidade v_k e depende da densidade local:

$$A_{hk}^{i}[\rho] \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} A_{hk}^{i}[\rho] = 1, \forall h,k = 1,...,n, \ \forall \rho \quad (7)$$

Os autores em [4] sugerem que $A_{hk}^{i}[\rho]$ é modelado por uma tabela de jogos com o parâmetro fenomenológico $\alpha \in [0,1]$ que representa as condições da estrada, sendo $\alpha = 0$ a pior estrada. Esta tabela considera três casos:

- Interação com um veículo mais rápido $(v_h < v_k)$, quando o veículo candidato encontra um veículo campo mais rápido e o veículo candidato ou mantém sua velocidade corrente ou possivelmente acelera, dependendo do espaço livre a frente.
- Interação com um veículo mais lento $(v_h > v_k)$, quando o veículo candidato encontra um veiculo campo mais lento e supoe-se que não acelerando a probabilidade de passar depende do tráfego local.
- Interação com um veículo com velocidade igual $(v_h = v_k)$, quando o veículo candidato e o veículo campo estão viajando a mesma velocidade.

Considerando a estrutura (6) e a densidade de probabilidade A_{hk}^{i} modelado pela tabela de jogos [4] , a solução numérica é obtida pelo método dos volumes finitos.

4. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Neste trabalho, um problema de condição inicial com condições de contorno periódicas, modelado pelo sistema de equações (5) foi solucionado numericamente pelo Método dos Volumes Finitos (MVF)[13]. O algoritmo usado foi preparado com um MVF de alta resolução com limitador de fluxo numérico "superbee" de Roe, conforme descrito em [9]. Estes recursos conferem uma maior precisão nos resultados em relação à precisão obtida com os métodos de segunda ordem.

Em conjunto com o MVF utilizamos o método de Monte Carlo. A simulação direta de problemas probabilísticos é a forma mais simples do uso do método de Monte Carlo. O método de simulação direta é caracterizado por ser facilmente projetado e por possuir uma estrutura que geralmente considera um grande número de apropriados detalhes microscópicos do sistema dinâmico analisado [5].

O método de Monte Carlo de simulação direta (DSMC) tem sido extensivamente usado no estudo do movimento de gases rarefeitos[2]. O local e o instante de ocorrência das colisões não são lentamente determinadas pela comparação da trajetória de todas as partículas, mas usando-se considerações estatísticas[11].

As dificuldades encontradas com os métodos de solução direta da equação de Boltzmann podem ser contornadas com a realização de simulações físicas do sistema considerado. Os métodos de simulação estocásticos em geral são os meios mais utilizados para encontrar soluções para problemas que podem ser representados pela equação de Boltzmann. Os princípios gerais, de qualquer método de simulação, consistem em construir um processo estocástico para um sistema real de N partículas ($\sim 10^{23}$), por meio de um conjunto de partículas simuladas ($\sim 10^{6}$), cuja distribuição no tempo seja comparável com a solução da equação de Boltzmann ($N \to \infty$).

Considerando-se condições de contorno apropriadas, as soluções numéricas que são determinadas através do método DSMC são obtidas dividindo-se o espaço do sistema analisado num número finito de células, em que partículas simulando as moléculas, são locadas de acordo com as condições iniciais do sistema analisado. Neste trabalho, o método DSMC foi aplicado para modelar um fluxo de tráfego veicular não-espacialmente homogêno com condições de contorno periódicas. A modelagem pelo DSMC foi realizada usando-se a analogia que existe com os problemas da teoria cinética modelados pela equação de Boltzmann [12].

5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

A simulação numérica foi aplicada para uma pista com condições de contorno periódicas adotando-se como parâmetro fenomenológico $\alpha = 1$ (estrada ótima), o valor de densidade máxima $\rho = 1$, o tempo total de simulação é 25 e comprimento máximo da estrada $x = 1$. Os resultados foram testados para dois valores da zona de visibilidade.

Atribuindo-se uma densidade inicial de $\rho = 0,46$ adota-se a seguinte distribuição inicial (t=0) de veículos ao longo da estrada, inicialmente 2% dos veículos encontra-se na posição entre [0; 0,6), 18% dos veículos entre [0,6; 0,7), 16% dos veículos entre [0,7; 0,8), 8% dos veículos entre [0,8;0,9) e 2% dos veículos entre [0,9; 1].

Para a zona de visibilidade utilizou-se os valores de $\xi = 0,05$ e $\xi = 0,0025$. As interações ocorrem com maior ou menor freqüência de acordo com a zona de visibilidade.

Os resultados obtidos pela simulação numérica utilizando o modelo matemático de velocidades discretas cujas interações entre os veículos são avaliadas através da tabela de jogos [4] e as soluções numérica são determinadas pelo método dos volumes finitos são apresentados nas figuras 1 e 2 para $\xi = 0,05$ e $\xi = 0,0025$, respectivamente.

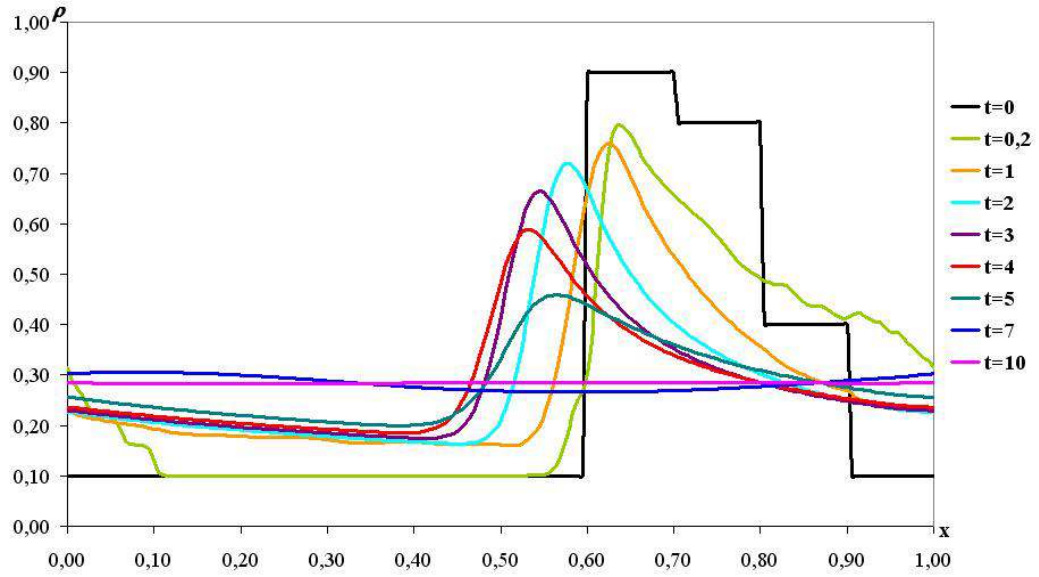


Figura 1. Velocidade versus Densidade (para valores de ξ=0,05) usando velocidades discretas e MVF

Nas fig. 1 e 2 o tempo t=0 representa a condição inicial da densidade dos veículos na estrada. O tempo total de simulação foi 25 sendo considerados 9 tempos para representação gráfica pois a partir de t=10 o sistema para $\xi = 0,05$ tende ao equilíbrio. Embora para $\xi = 0,0025$ o tempo de tendência ao equilíbrio é posterior a t=10, manteve-se na figura 2 os mesmos tempos da figura 1 com objetivo de comparar estes resultados aos obtidos pelo método de Monte Carlo

Na Figura 3 tem-se a representação da condição inicial para a densidade e o seu comportamento para 9 tempos. Constatou-se que este sistema entra em equilíbrio para um tempo superior a t=10 entretanto adotou-se os tempos iguais a t=0,2;1,2;3;4;5;7 e 10 com objetivo de comparar estes resultados com os resultados obtidos pelo MVF.

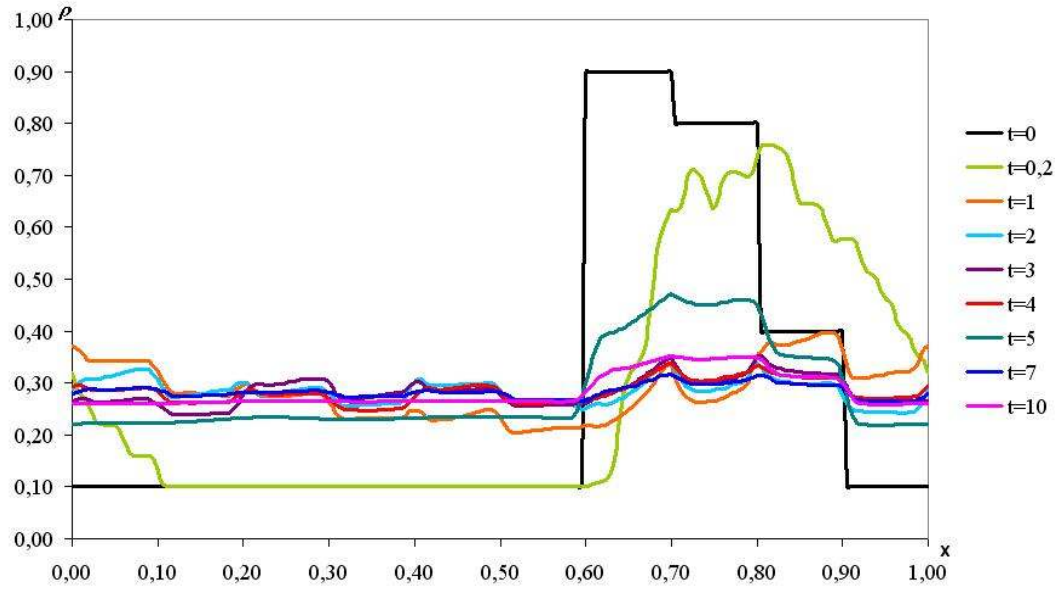


Figura 2. Velocidade versus Densidade (para valores de ξ=0,0025) usando velocidades discretas e MVF

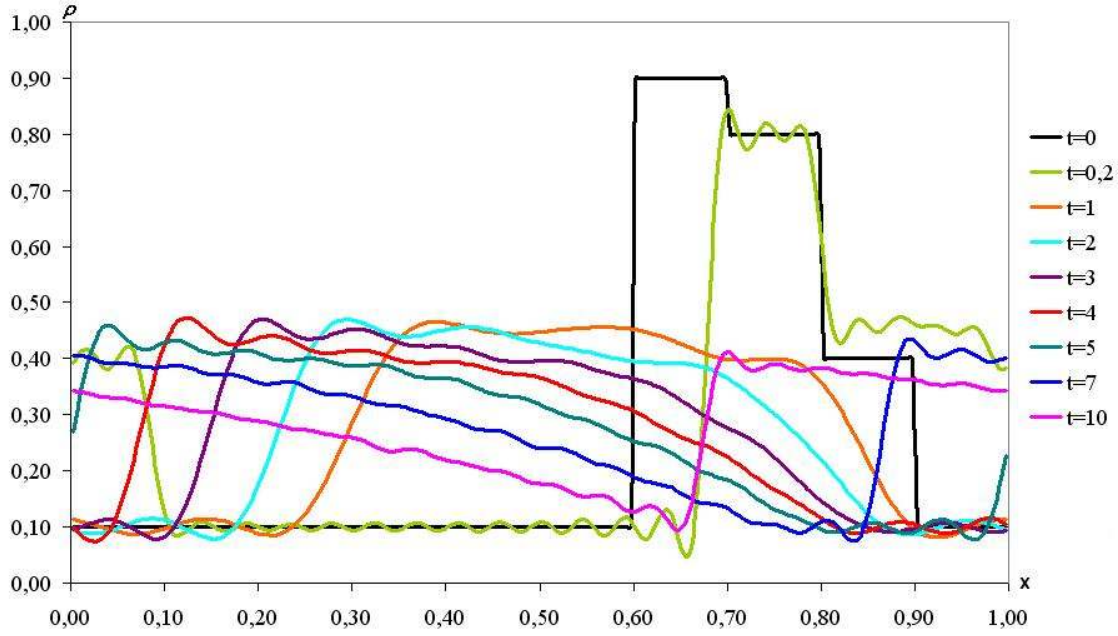


Figura 3. Velocidade versus Densidade (para valores de ξ=0,0025) usando o DSMC

6. CONCLUSÕES

Neste artigo desenvolveu-se o modelo cinético das velocidades discretas cujas interações entre os veículos foram representadas por uma tabela de jogos e as soluções numéricas determinadas pelo MVF e comparadas com as soluções do modelo computacional DSMC. Considerou-se o estudo do fluxo de tráfego de veicular para uma pista com condições de contorno periódicas.

As maiores diferenças existentes entre as soluções obtidas com o modelo DSMC e pelo MVF, encontram-se nas distribuições de velocidades, que pelo DSMC são distribuídas uniformementes entre v_{min}

e v_{max}, e com MVF as velocidades são discretas e na amplitude espacial das interações entre os veículos, que pelo modelo DSMC é variável e depende da posição relativa dos veículos e velocidades, e pelo MVF é um comprimento constante.

Observa-se que na figura 2 a onda de choque vai para trás até o tempo t=5 e a partir deste tempo, a onda se desloca para frente e também ocorre na figura 3 usando o DSMC.

Para comparar os resultados obtidos pelo modelo DSMC e pelo MVF, foram analisados dois valores $\xi = 0,05$ e $\xi = 0,0025$. Deve-se salientar que a zona menor acarreta um maior número de iterações. O método MVF para a $\xi = 0,05$ fornece densidades com comportamentos semelhantes para diversos tempos entre 0 e 25. Isto também é observado para a zona de visibilidade $\xi = 0,0025$, entretanto para esta zona observa-se que a onda de choque tem uma amplitude menor para os tempos entre 0 e 5 atingindo o equilíbrio mais rapidamente, menor do que 9 tempos. Desta forma, podemos afirmar que o método MVF converge mais rapidamente ao equilíbrio do sistema para uma zona de visibilidade menor.

Testando a zona de visibilidade menor $\xi = 0,0025$ para um outro método de resolução, DSMC, obtemos para o tempo 0.2 uma melhor representação da densidade do que aquela apresentada pelo método MVF. O método DSMC representa melhor o comportamento do tráfego real atingindo o equilíbrio em um tempo posterior ao do MVF, ou seja, posterior a 9 tempos.

Ambos os métodos MVF e DSMC foram utlizados para análise do fluxo em uma pista para o caso não-espacialmente homogêneo. Comparando estes dois métodos, o MVF converge mais rapidamente, além de apresentar um menor tempo de execução do que o DSMC sendo também mais simples de elaborar, as iterações e todas as suas considerações no DSMC não são tão óbvias.

Concluiu-se que existe uma similaridade entre os resultados obtidos pelo modelo matemático e pelo modelo computacional, cuja inter-relação é caracterizada pela distância da zona de visibilidade. Os resultados obtidos demonstram que quanto menor for a zona de visibilidade, maior é o número de interações, acarretando em um maior tempo de simulação para o sistema entrar em equilíbrio.

REFERÊNCIAS

[1] Bellomo N., Delitala M. and Coscia V., "*On the mathematical theory of vehicular traffic flow I – fluid dynamic and kinetic modeling*", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 12, 1801-1843, (2002).

[2] Brid, G. A. , *Direct simulation and the Boltzmann equation,* Phys. Fluids 13 (11), 2676, (1970).

[3] Coscia V., Delitala M. and Frasca P., "*On the mathematical theory of vehicular traffic flow models II. Discrete velocity kinetic models*", International Journal Non-linear Mechanics, 42, 411-421, (2007).

[4] Delitala M. and Tosin A., *"Mathematical modeling of vehicular traffic: a discrete kinetic theory approach*", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol 17, no. 6, 901-932, (2007)

[5] Hammersley, J.M., Handscomb, D.C. *Monte Carlo Methods*, Chapman and Hall, 1979.

[6] Kerner B.S., *The Physics of Traffic*, Springe, New York, (2004).

[7] Klar A., Küne R. and Wegener R., "*Mathematical models for vehicular traffic*", Surveys Mathematical Industry, 6, 215-239, (1996)

[8] Leutzbach, W., *Introduction to the Theory of Traffic Flow*, Springer, New York, (1988).

[9] Leveque R.J, "*Numerical Methods for Conservation Laws*", Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkäuser Verlar, (1990).

[10] Prigogine, I. and Herman, R., *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, Elsevier, New York, (1971).

[11] Meiburg, E. *Comparison of the molecular dynamics method and the direct simulation Monte Carlo technique for flows around simple geometries*, Phys. Fluids 29 (10), 3107 (1986)

[12] Waldeer, K.T. *The direct simulation Monte Carlo method applied to a Boltzmann-like vehicular traffic flow model*, Comput. Phys. Commun., Vol. 156, 1, (2003).

[13] Yu L., Righetto A.M, Martins R.P, Rosman P.C.C and Eiger S., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 4*, ABRH, Rio de Janeiro, (1999).