VETOR

Estimativa da Variação Temporal de Condutância Térmica de Contato em Placas Termicamente Finas via Método MCMC☆

Estimation of Time-Varying Thermal Contact Conductance in Thermally Thin Plates via MCMC Method

Kenji Watanabe[1], Luiz Alberto da Silva Abreu[1,†], Diego Campos Knupp[1], Eiji Watanabe[1]

[1] *Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, Brasil*

[†]**Autor correspondente:** luiz.abreu@iprj.uerj.br

Resumo

Este trabalho trata da solução de um problema inverso de condução de calor visando estimar a variação temporal de condutância térmica de contato, num problema unidimensional em um material de duas camadas termicamente finas, aquecidas por meio de um fluxo de calor aplicado na superfície superior e exposto a convecção térmica na superfície inferior. Para a formulação do problema direto, considerando placas termicamente finas, foi utilizado o método *Classic Lumped*. Esta formulação reduz o problema original em duas equações diferenciais ordinárias acopladas, possibilitando diminuir o custo computacional necessário para solucionar o problema direto associado, que foi resolvido utilizando a função NDSolve, intrínseca do software Mathematica. Para a solução do problema inverso, foi utilizado o método Monte Carlo via Cadeias de Markov, dentro de uma abordagem Bayesiana, aplicando o algoritmo Metropolis-Hastings. O método foi analisado a partir de medidas simuladas de temperatura e se mostrou capaz para estimar uma função temporal da condutância térmica de contato. Esta metodologia permite levar em conta as incertezas associadas aos parâmetros presentes nos modelos, bem como, àquelas associadas com a estimativa da condutância térmica variando com o tempo, o que não é observado nos métodos voltados para estimativa temporal da condutância térmica de contato encontrados atualmente na literatura.

Palavras-chave

Condutância térmica de contato • Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov • *Classic Lumped*

☆Este artigo é uma versão estendida do trabalho apresentado no XXIV ENMC Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XII ECTM Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, realizado na modalidade *webinar*, de 13 a 15 de outubro de 2021.

Abstract

This work deals with the solution of an inverse heat conduction problem to estimate a time-varying thermal contact conductance, in a one-dimensional problem in a composite medium with two thermally thin layers which is heated by a heat flux applied to the upper surface and exposed thermal convection on the bottom surface. The *Classic Lumped* method was applied to the direct problem mathematical formulation, considering thermally thin plates. This formulation reduces the original problem into two coupled ordinary differential equations, reducing the computational cost needed to solve the associated direct problem, which is solved with the NDSolve function, intrinsic to the Mathematica software. The inverse problem was solved with the Markov Chain Monte Carlo method within a Bayesian approach, applying the classic Metropolis-Hastings algorithm. The method was analyzed from simulated temperature measurements and proved to be capable of estimating a temporal function of the contact thermal conductance. This methodology allows taking into account the uncertainties associated with the parameters present in the models, as well as those associated with the estimation of thermal conductance varying with time, which is not observed in the methods aimed at temporal estimation of the contact thermal conductance currently found in the literature.

Keywords

Thermal contact conductance • Markov Chain Monte Carlo Method • *Classic Lumped*

1 Introdução

O estudo da transferência de calor em meios compostos multicamada tem crescido nesta última década, em especial devido ao grande número de aplicações em diversas áreas de engenharia, matemática e indústria em geral [1-6]. Por meios compostos multicamada pode-se considerar, por exemplo, materiais compósitos laminados, juntas coladas de tubulações, paredes compostas envolvendo isolamentos térmicos, junção entre componentes eletrônicos e trocadores de calor como em processadores etc. Desta forma, se beneficiam dos avanços tecnológicos e de pesquisa voltados para a transferência de calor em meios multicamada as indústrias de materiais, de engenharia automotiva, de engenharia aeroespacial, de equipamentos eletrônicos, entre outras. O conhecimento relacionado com a qualidade do contato térmico na interface de meios compostos tem influência direta, por exemplo, na qualidade do resfriamento de componentes eletrônicos [2], na determinação de falhas de interface na junção de materiais compósitos laminados ou materiais colados [3, 5, 7] etc.

Uma análise quantitativa sobre a qualidade do contato entre camadas pode ser realizada por meio de transferência de calor por meio da definição de uma quantidade denominada como condutância térmica de contato, ou sua inversa, denominada resistência térmica de contato. Este parâmetro aparece tipicamente nos modelos clássicos envolvendo transferência de calor em meios constituídos por mais de uma camada. Valores de condutância térmica de contato tendendo a zero indicam falha de contato na interface e valores de condutância térmica de contato tendendo a infinito indicam contato térmico perfeito [3].

Fatores como a rugosidade da superfície de contato dos materiais unidos e pressão aplicada às superfícies externa e interna do meio composto influenciam diretamente no valor desta propriedade. Desta forma, meios compostos que sofrem variação da pressão aplicada às suas superfícies durante sua aplicação prática podem apresentar variação temporal da condutância térmica de contato [1, 8, 9]. Por exemplo, tubulações feitas de material compósito, unidas com adesivo epóxi, que sejam submetidas a variações de pressão quando submersas [1, 4, 8-10].

A condutância térmica de contato em si é um tema de pesquisa em transferência de calor por condução que vem sendo estudado ao longo de muitos anos e que permanece sendo um tema desafiador. Muitos trabalhos, especialmente nesta última década, se dedicaram na proposta de metodologias experimentais de condutância térmica de contato [11-14], em aplicações e na sua identificação envolvendo a solução de problemas inversos, que

tipicamente são resolvidos por meio de abordagens analíticas e Bayesianas. Os primeiros, tem sua solução obtida por meio de métodos que não envolvem uma análise sob incerteza das estimativas e dos demais parâmetros presentes nos modelos utilizados, como métodos envolvendo gradiente conjugado ou funcionais de reciprocidade [2, 15-24]. Entre as abordagens envolvendo técnicas Bayesianas [3, 7, 25], que permitem análise sob incerteza, foram consideradas estimativas e análises apenas em funções com variação espacial da condutância térmica de contato.

Uma vantagem de uma metodologia baseada no método de Monte Carlo via Cadeias de Markov consiste em possibilitar de forma robusta a regularização, mesmo quando muitos parâmetros são considerados e quando as funções estimadas tem descontinuidades [25-27]. Metodologias puramente analíticas ou baseadas em métodos de otimização estocástica ou determinística, tipicamente têm grande dificuldade na recuperação das descontinuidades (mesmo com abordagens mais recentes [20, 21, 26]). Metodologias baseadas em métodos de otimização estocástica, em geral, ainda mostram ter dificuldade na obtenção de soluções acuradas quando há um número alto de parâmetros a serem estimados (neste trabalho entre 30 e 50) e o custo computacional para este problema tratado via métodos estocásticos podem ser inclusive superiores ao método MCMC e além de fornecerem resultados menos acurados na região de descontinuidade [28, 29]. Outra vantagem dos métodos MCMC consiste em serem obtidas estimativas que não são apenas pontais do parâmetro ou da função estimada, mas são amostras de uma distribuição de probabilidade a posteriori. Desta forma, pode-se realizar estatísticas sobre as estimativas, possibilitando de forma natural uma análise sob incerteza dos parâmetros do modelo e da função estimada [26].

Portanto, neste trabalho será aplicado o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, com o objetivo de estimar a variação temporal da condutância térmica de contato [25, 27, 29, 30]. Esta metodologia permite levar em conta de forma natural as incertezas associadas aos parâmetros presentes nos modelos e ainda, àquelas associadas com a estimativa da condutância térmica variando com o tempo, o que não é observado nos métodos encontrados atualmente na literatura, que quando incluem análise sob incerteza são voltados apenas para estimativa espacial da condutância [26, 29]. Considerou-se um problema transiente e unidimensional de transferência de calor em um material constituído por duas camadas termicamente finas, modelado matematicamente por uma abordagem de parâmetros concentrados, denominada também como *Classic Lumped* [8, 31].

2 Problema Físico-Matemático

Considera-se neste trabalho um problema físico unidimensional e transiente de transferência de calor num meio composto por duas camadas (ver Fig. 1). Um fluxo de calor, q, é aplicado na superfície superior enquanto a superfície inferior troca calor por convecção térmica com o ambiente a uma temperatura T_∞. Na interface entre as camadas, na posição $z = L_1$, é considerada a existência da condutância térmica de contato $h_c(t)$ dependente do tempo [1, 3, 7-9, 31]. Detalhes sobre a formulação matemática para este problema, descrita nas Eqs. (1) a (7), podem ser obtidos na literatura [1, 3, 7-9, 31]. Destaca-se, que as denominadas condições de interface (Eqs. (4) e (5) são obtidas por meio de um balanço de energia na posição que corresponde a uma superfície de interface entre os dois domínios (em $z = L_1$) [8]. A condutância térmica de contato, que corresponde a inversa da chamada resistência térmica de contato, modela a qualidade do contato entre as camadas [2, 8, 9]. Desta forma, valores altos de condutância térmica de contato significam contato térmico perfeito e, neste caso, as temperaturas das duas camadas tendem a ser iguais na interface. Por outro lado, valores baixos correspondem a contato térmico imperfeito ou falta de contato entre as camadas [1-3, 7-9, 31].

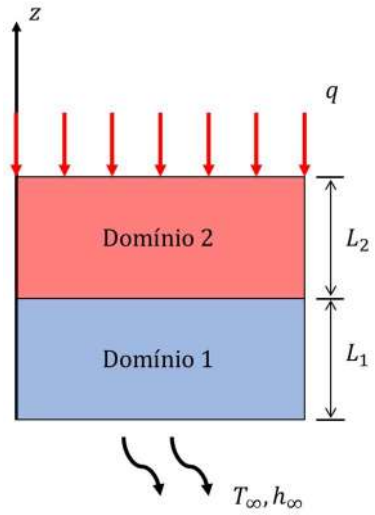


Figura 1: Esquema físico de um meio compósito de duas camadas.

Considerando um meio compósito com duas camadas, cujas espessuras são L_1 e L_2, a equação do calor unidimensional transiente é dada por [8, 9]:

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1(z,t)}{\partial z^2}, \qquad 0 < z < L_1 \text{ e } t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2(z,t)}{\partial z^2}, \qquad L_1 < z < L_1 + L_2 \text{ e } t > 0 \tag{2}$$

juntamente com as seguintes condições de contorno e de interface:

$$-k_1\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial z} + h_\infty T_1(z,t) = h_\infty T_\infty, \qquad z = 0 \text{ e } t > 0 \tag{3}$$

$$k_1\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial z} = h_c(t)[T_2(z,t) - T_1(z,t)], \qquad z = L_1 \text{ e } t > 0 \tag{4}$$

$$k_1\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial z} = k_2\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial z}, \qquad z = L_1 \text{ e } t > 0 \tag{5}$$

$$k_2\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial z} = q(t), \qquad z = L_1 + L_2 \text{ e } t > 0 \tag{6}$$

e ainda considerando as condições iniciais como:

$$T_1(z,t) = T_2(z,t) = T_\infty, \qquad 0 < z < L_1 + L_2 \text{ e } t = 0 \tag{7}$$

A formulação matemática *Classic Lumped* permite que o modelo matemático descrito pelas Eqs. (1) a (7) seja reescrito na forma de um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias, consequentemente reduzindo o custo computacional [8, 9, 31]. No uso do *Classic Lumped* assume-se que o gradiente espacial de temperatura pode ser desprezado. Assim, é considerada uma temperatura média em cada domínio do problema, correspondente a cada material. Esta formulação é adequada em materiais termicamente finos [8, 9, 31], ou seja, quando o número de Biot associado é menor que 0,1. Assim, considerando propriedades térmicas constantes e supondo que as placas que compõem o meio compósito sejam suficientemente finas, o problema pode ser escrito em termos do campo de temperatura média transversal, definida para cada placa como [31]:

$$T_{m_1}(t) = \frac{1}{L_1}\int_0^{L_1} T_1(z,t)\,dz, \tag{8}$$

$$T_{m_2}(t) = \frac{1}{L_2}\int_{L_1}^{L_1+L_2} T_2(z,t)\,dz. \tag{9}$$

Aplicando os operadores descritos em (8) e (9) e assumindo que $T_1(z=0,t) = T_{m_1}(t)$ e $T_2(z=L_1+L_2,t) = T_{m_2}(t)$, obtêm-se [31]:

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{dT_{m1}(t)}{dt} = \frac{1}{L_1}\frac{h_c(t)\left[T_{m_2}(t) - T_{m_1}(t)\right]}{k_1} - \frac{1}{L_1}\frac{h_\infty\left[T_{m_1}(t) - T_\infty\right]}{k_1}, \qquad \text{para } t > 0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{dT_{m_2}(t)}{dt} = \frac{1}{L_2}\frac{q(t)}{k_2} - \frac{1}{L_2}\frac{h_c(t)\left[T_{m_2}(t) - T_{m_1}(t)\right]}{k_2}, \qquad \text{para } t > 0 \tag{11}$$

$$T_{m_1}(t) = T_{m_2}(t) = T_\infty, \qquad \text{para } t = 0 \tag{12}$$

O modelo matemático descrito pelas equações parciais (1) a (7), será denominado neste trabalho como modelo completo enquanto as equações diferenciais ordinárias (10) a (12), constituem um modelo que neste trabalho será denominado como modelo reduzido e podem ser aplicados para modelar eficientemente o problema descrito pelas equações (1) a (7), apenas quando as camadas são ditas termicamente finas [31, 32]. A modelagem via formulação *Classic Lumped* tem ampla aplicação prática, uma vez que o modelo resultante fornece soluções acuradas para muitos problemas práticos, por este motivo escolheu-se esta formulação neste trabalho com o objetivo de analisar a estimativa da variação temporal da condutância térmica de contato. Denomina-se problema direto quando todos os parâmetros existentes num modelo são conhecidos e por meio da solução das equações diferenciais associadas determina-se o campo de temperaturas para os meios 1 e 2 que constituem o meio compósito[26]. O problema direto neste trabalho, dado pelas equações diferenciais ordinárias (10) a (12), foi solucionado pela rotina NDSolve, intrínseca da plataforma Mathematica. A rotina NDSolve resolve sistemas PDEs sob controle de erros absolutos e relativos e possibilita a escolha automática de método e de malha, dando as metas de precisão e acurácia como dados de entrada. O problema completo (1) a (7), foi solucionado por meio da rotina NDSolve optando-se pelo método de linhas baseado em diferenças finitas de ordem variável e tamanho de passo variável. Foi definido o parâmetro MaxStepSize, que especifica o tamanho máximo de um único passo de 10^{-2}. Para o modelo reduzido a rotina NDSolve também foi utilizada, mas neste caso, optou-se por fixar na rotina o uso do método de Runge-Kutta de quarta ordem e tamanho máximo de um único passo de 10^{-2}.

2.1 Problema inverso

Em muitas áreas do conhecimento, em especial na engenharia, é de grande importância caracterizar sistemas ou fenômenos. Entretanto, em muitas situações, determinadas características ou quantidades de interesse não podem ser medidas diretamente. Desta forma, segundo a literatura [26, 27, 29, 33-37], os denominados problemas inversos tratam do uso de medições disponíveis (que em problemas de condução de calor tipicamente são medições de temperatura, intensidade de radiação ou de fluxo de calor) para determinar as quantidades desconhecidas de interesse (que podem ser propriedades térmicas, geometria, condições de contorno e iniciais, etc). Os problemas inversos, portanto, tratam da medição indireta de parâmetros ou funções que aparecem nas equações diferenciais que modelam estes sistemas ou fenômenos de interesse e cuja medição não pode ser realizada diretamente ou quando sua medição direta é difícil [26, 29, 33, 34, 37]. Em poucas palavras, podem ser definidos como sendo a determinação das causas dados os efeitos, e tem características particulares que tornam desafiadora a sua solução, como o fato de serem problemas classificados como mal postos [26, 29, 34-40]. Há diferentes definições e classificações, dependendo da área do conhecimento, e podem ser aplicados em inúmeros problemas práticos. Para mais detalhes sobre problemas inversos, sugere-se uma consulta na literatura sobre este tema [26, 29, 33, 34, 37, 39, 40]. Neste trabalho, pretende-se estimar a condutância térmica de contato que é um parâmetro presente na interface entre dois meios por meio de medições não intrusivas tomadas em uma das superfícies.

As medições de condutância térmica de contato tipicamente se fazem indiretamente por medidas de temperatura que geralmente são intrusivas, colocando-se sensores térmicos (por exemplo, termopares) internamente nos domínios e próximos da posição de interface [1, 2, 12]. Neste trabalho, entretanto, a solução do problema inverso é obtida via medições não intrusivas realizadas apenas na superfície superior onde um fluxo de calor é aplicado. Esta abordagem vem sendo tema recente de estudo por muitos grupos de pesquisa envolvendo principalmente abordagens Bayesianas, analíticas, via métodos via funcionais de reciprocidade ou abordagens via método de gradiente conjugado [2, 5, 11, 12, 16, 20]. O presente trabalho trata de uma abordagem Bayesiana, onde a estimativa é realizada por meio de inferência estatística, e a solução do problema inverso é realizada a partir da denominada densidade de probabilidade posteriori, que é o modelo para a distribuição de probabilidade condicional dos parâmetros desconhecidos dadas as medidas, desta forma obtendo amostras aproximadas de uma distribuição da distribuição de densidade a posteriori [3, 7, 25]. Esta abordagem é especialmente interessante pois pode levar em conta de forma natural todas as incertezas presentes nos parâmetros e funções [26, 29, 32]. Para a solucionar o problema inverso nesta abordagem foi aplicado o método MCMC implementado por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings [26, 27, 29, 30, 41-43]. O foco principal esteve em estimar a variação temporal da condutância térmica de contado via inferência Bayesiana, o que ainda não foi foco de pesquisa nos trabalhos encontrados na literatura para este problema nestas abordagens.

Na abordagem Bayesiana, toda informação previamente disponível sobre os parâmetros é modelada na forma de uma densidade de probabilidade a priori, $\pi(\boldsymbol{P})$, que é combinada com as informações fornecidas pelas medidas experimentais de temperatura, que são modeladas por meio da função de verossimilhança, $\pi(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{P})$, a fim de obter a densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros, $\pi(\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Y})$, usando o teorema de Bayes que pode ser definido como [26, 27, 41]:

$$\pi(\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{P})\pi(\boldsymbol{P})}{\pi(\boldsymbol{Y})} \tag{13}$$

onde $\pi(\boldsymbol{Y})$ é a densidade de probabilidade marginal das medições, que é uma constante de normalização.

Assumindo que os erros de medição são aditivos, independentes dos parâmetros e podem ser modelados como variáveis aleatórias gaussianas, com média zero, matriz de covariância conhecida $\boldsymbol{W}$, a função de verossimilhança pode ser escrita como:

$$\pi(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{P}) = 2\pi^{-\frac{D}{2}}\,|\boldsymbol{W}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})\right)^{T}\boldsymbol{W}^{-1}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})\right)\right] \tag{14}$$

onde D é o número total de medidas, e $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})$ é a solução do problema direto associado ao modelo (Eqs. (10) a (12)) reduzido a partir de um vetor de parâmetros $\boldsymbol{P}$, que neste trabalho é definido como a função temporal discretizada em um total de N intervalos discretos Δt da condutância térmica de contato, $h_c(t)$. Desta forma, o vetor de parâmetros é definido como $\boldsymbol{P} = \left[P_1, P_2, P_j, \dots, P_{N-1},\ P_N\right]^T$. O algoritmo clássico utilizado, *Metropolis-Hastings,* pode ser descrito nas seguintes etapas [26, 27, 41-43]:

1. Faça $m = 1$ e inicie a cadeia de Markov com o estado inicial $\boldsymbol{P}^{(1)}$.

2. Gere um ponto candidato $\boldsymbol{P}^*$ de uma distribuição proposta $p\left(\boldsymbol{P}^*|\boldsymbol{P}^{(m)}\right)$.

3. Calcule a probabilidade da denominada razão de Hastings $R\left(\boldsymbol{P}^*|\boldsymbol{P}^{(m)}\right)$ com

$$R\left(\boldsymbol{P}^*|\boldsymbol{P}^{(m)}\right) = \min\left[1, \frac{\pi_{posterior}(\boldsymbol{P}^*)\,p\left(\boldsymbol{P}^{(m)}|\boldsymbol{P}^*\right)}{\pi_{posterior}(\boldsymbol{P}^{(t)})\,p\left(\boldsymbol{P}^*|\boldsymbol{P}^{(m)}\right)}\right] \tag{15}$$

4. Gere um valor aleatório U~$U(0,1)$, que é distribuído uniformemente entre (0, 1).

5. Se $U \leq R\left(\boldsymbol{P}^*|\boldsymbol{P}^{(t)}\right)$, então $\boldsymbol{P}^{(m+1)} = \boldsymbol{P}^*$. Senão, $\boldsymbol{P}^{(m+1)} = \boldsymbol{P}^{(m)}$.

6. Faça $m = m + 1$ e retorne a etapa 2 para gerar a sequência $\{\boldsymbol{P}^{(1)}, \boldsymbol{P}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{P}^{(n)}\}$.

No presente trabalho foram utilizadas duas informações a priori distintas, a primeira considera que há informação disponível sobre a condutância térmica de contato, portanto é utilizada uma priori gaussiana. Esta informação a priori pode ser escrita na forma:

$$\pi(\boldsymbol{P}) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}|\boldsymbol{V}|^{-\frac{1}{2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{\mu}_{p_{ri}}\right)^{T}\boldsymbol{V}^{-1}\left(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{\mu}_{p_{ri}}\right)\right] \tag{16}$$

onde N é o número de parâmetros discretos que compõem o vetor $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{V}$ é a matriz de covariância dos parâmetros e $\boldsymbol{\mu}_{p_{ri}}$é o conhecimento prévio disponível para $\boldsymbol{P}$. Uma segunda informação a priori, não informativa, na forma de variação total é aplicada. Esta informação a priori pode ser escrita como:

$$\pi(\boldsymbol{P}) \propto \exp[-\gamma TV(\boldsymbol{P})] \tag{17}$$

onde

$$TV(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{N} V_j(\boldsymbol{P}) \tag{18}$$

e

$$V_j(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{2}\sum_{i\epsilon N_j} l_{ij}|P_i - P_j| \tag{19}$$

onde N é o número de pontos discretos, ou seja, de pontos vizinhos, γ é um parâmetro de regularização e l_{ij} é o comprimento de borda, ou seja, a distância entre os pontos discretos vizinhos.

Considerou-se uma distribuição de proposta uniforme, numa abordagem *random-walk* [26], conforme a Eq. (20).

$$P_j^* = P_j^m + P_j^m \, w_j(2r - 1) \tag{20}$$

onde r é um número aleatório com distribuição uniforme, tal que $r \sim U(0,1)$ e w_j é a máxima variação do parâmetro P_j, que é o valor discreto da condutância térmica de contato que pertence ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{P}$.

3 Resultados e discussões

Neste trabalho foi utilizado o software Wolfram Mathematica em um microcomputador com processador i7-8750H e 8GB de memória RAM. O objetivo principal esteve em aplicar o método MCMC (Markov Chain Monte Carlo) na identificação de uma condutância térmica de contato, com variação temporal, num meio com duas camadas termicamente finas. Serão avaliadas situações onde a condutância térmica de contato pode variar bruscamente com o tempo, visando analisar a metodologia na estimativa de funções descontínuas desafiadoras do ponto de vista da solução de problemas inversos e ainda considerar funções típicas em aplicações envolvendo a identificação de falhas de interface de materiais. Nestas aplicações, há uma variação abrupta da condutância térmica de contato quando os materiais perdem o contato entre suas camadas e a identificação do momento no tempo em que isso ocorre pode ser realizada por meio da estimativa da função temporal da condutância térmica de contato. Esta aplicação tem por objetivo, por exemplo, avaliar a adesão de juntas coladas de tubulações quando sofrem variação da pressão externa, quando falhas de contato podem surgir devido à mudança na pressão, o que pode ocorrer por exemplo quando estas tubulações estão sendo submersas. A Eq. (21) descreve o perfil temporal da função da condutância térmica exata a ser analisada neste trabalho.

$$h_c(t) = \begin{cases} 1000\,\mathrm{W/m^2{}^\circ C}, & \text{para } \left(t < t_f/3\right) \text{ e } t > \left(2t_f/3\right) \\ 0\,\mathrm{W/m^2{}^\circ C}, & \text{para } \left(t_f/3\right) < t < \left(2t_f/3\right) \end{cases} \tag{21}$$

Os resultados apresentados foram obtidos por meio de medições simuladas de temperatura, geradas usando a solução do problema direto completo, dado pelas equações (1) a (7), assumindo na geração destas medições um perfil conhecido da variação temporal da condutância térmica de contato. Utilizou-se o modelo dito completo para evitar o chamado crime inverso, de tal forma que o modelo direto utilizado na geração de medições simuladas é diferente daquele utilizado na solução do problema inverso. Erros Gaussianos, não correlacionados, com média zero e desvio padrão constante, $\sigma = 0{,}05^\circ\mathrm{C}$, foram adicionados na solução do problema direto completo e as medições foram consideradas disponíveis apenas na superfície superior (numa aplicação voltada para uma tubulação seria equivalente a uma superfície externa), com aquisição de medições em intervalos de 1 s .

O desvio-padrão, assim como as características da função de verossimilhança adotada, foram consideradas assumindo que medições reais possam ser obtidas no futuro via câmeras termográficas. Estes equipamentos demonstraram em trabalhos anteriores dos autores e também outros, encontrados na literatura [25, 26, 44], que os erros em problemas similares ao tratado no presente trabalho tem distribuição Gaussiana, são não correlacionados, com média zero e desvio padrão constante e em torno ou menores do que $\sigma = 0{,}05^\circ\mathrm{C}$. Além disso, este nível de ruído foi também implementado em trabalhos anteriores dos autores, e desta forma, manteve-se o mesmo nível de ruído para comparação com trabalhos envolvendo a estimativa puramente espacial da condutância térmica de contato [25]. A duração total do experimento simulado foi de $t_f = 600$ s. Os demais parâmetros que aparecem nos modelos matemáticos são considerados deterministicamente conhecidos e estão descritos na Tabela 1. Destaca-se que para o modelo *Classic Lumped* é adequado apenas para números de Biot menores do que 0,1, o que pode ser

verificado pela tabela 1, uma vez que pela definição o número de Biot para o problema estudado é de aproximadamente $Bi = 0{,}003$ [8, 31].

Foram consideradas duas camadas de igual espessura de aço AISI 1050, de tal forma que $L_1 = L_2$. Os parâmetros considerados neste trabalho foram em sua maioria os mesmos reportados no caso 1, estudado por Colaço e Alves [16]. O custo computacional da solução do problema direto descrito pelo modelo reduzido é em torno de 0,1 s, o que é aproximadamente 10 vezes mais rápido do que a solução do problema direto completo. Uma vez que os métodos MCMC precisam executar o problema direto milhares de vezes até a convergência, este ganho de custo computacional é significativo. A função AbsoluteTiming, intrínseca do Mathematica, foi utilizada para o cálculo do tempo de CPU.

No primeiro caso estudado para o problema inverso, Caso 1, a condutância térmica de contato foi modelada e estimada como um vetor contendo seu valor em $N = 30$ tempos discretos. A Fig. 2 mostra o perfil de condutância térmica de contato exato e a reconstrução utilizando medidas simuladas de temperatura via método MCMC, com priori gaussiana dada pela Eq. (16).

Tabela 1: Parâmetros Físicos, considerando o trabalho de Colaço e Alves [16].

Parâmetro físico	Símbolo	Valor
Difusividade térmica aço 1050	α_1 e α_2	$1{,}474 \times 10^{-5}$ m^2/s
Condutividade térmica aço 1050	k_1 e k_2	54 W/(m°C)
Espessura da camada 1 e 2	L_1 e L_2	0,01 m
Temperatura ambiente	T_∞	23 °C
Coeficiente de troca térmica	h_∞	15 W/(m^2°C)
Fluxo de calor	$q(t)$	10000 (W/m^2)

Na Fig. 3a, mostra-se a convergência das cadeias de Markov em dois instantes de tempo para este mesmo caso e na Fig 3b o histograma construído com os 40000 últimos estados da cadeia de Markov para um no tempo 220s, que correspondem a estados onde a Cadeia de Markov considerada convergida, por inspeção gráfica, para a distribuição a posteriori [26, 27, 41]. Os primeiros 40000 estados da cadeia de Markov, antes que fosse atingido equilíbrio, foram descartados. Estes estados iniciais recebem tipicamente o nome de *burn-in period* e correspondem aos estados iniciais, onde as cadeias ainda não estão convergidas, em equilíbrio, e os dados obtidos ainda não correspondem a amostras da distribuição a posteriori [26, 27, 41]. A função exata $h_c(t)$, mostrada na Fig. 2, foi acuradamente estimada mesmo para uma densidade de probabilidade a priori com distribuição gaussiana com média centrada num valor considerado de contato térmico perfeito. Considerou-se em todos os tempos discretizados, uma média da distribuição a priori de $h_c(t) = 1000$W/(m^2°C), com desvio padrão de 10W/(m^2°C). Este valor da média da priori foi também o estado inicial das cadeias de Markov para os resultados mostrados neste caso 1. Desta forma, assume-se previamente que não há nenhuma falha e a informação a priori adotada, centrada num valor de contato perfeito, não indica previamente a posição onde pode haver falha de contato.

Combinando a informação a priori com a função de verossimilhança, por meio do teorema de Bayes, para este problema considerado nota-se que a estimativa da condutância de contato obtida é capaz de obter estimativas acuradas indicando a posição de falha. Para a solução apresentada o custo computacional do problema inverso, até serem completas as 80000 iterações do método MCMC, foi em torno de 2 horas. Podendo ser maior, dependendo do número de parâmetros estimado conforme será apresentado no caso 3.

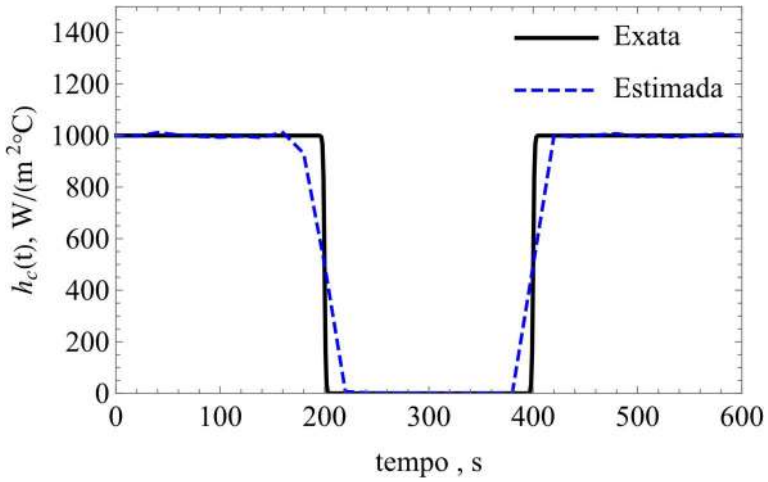
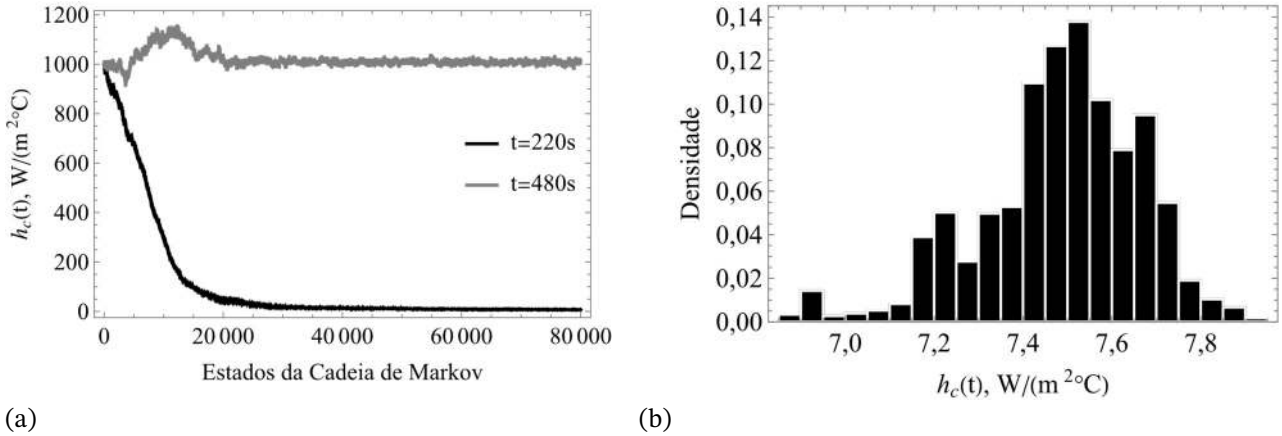


Figura 2: Perfil exato e estimado da condutância térmica, para priori gaussiana centrada em 1000W/(m^2°C) e estado inicial das cadeias de Markov em 1000W/(m^2°C), com 30 pontos discretos na função a ser estimada.



(a) (b)

Figura 3: (a) Estados das cadeias de Markov para o Caso 1, mesmo da Fig. 2; (b) Histograma para o tempo $t = 220$ s para o Caso 1, mesmo da Fig. 2.

Um segundo caso foi considerado, Caso 2, assumindo agora uma priori de variação total (descrita pelas Eqs. (17) a (19)), que é uma distribuição a priori não informativa, do tipo *Markov Randon Field*, adequada quando espera-se que variações abruptas possam ocorrer na função a ser estimada [7, 26, 32]. Os resultados deste Caso 2 estão mostrados na Fig 4, Fig 5a e Fig 5b. O valor após a convergência, neste tipo de priori não informativa, também foi acurado e indica boa estimativa da condutância térmica neste caso. Para estes resultados, considerou-se um valor do parâmetro de regularização gama obtido após intensivos testes numéricos, $\gamma = 0{,}001$.

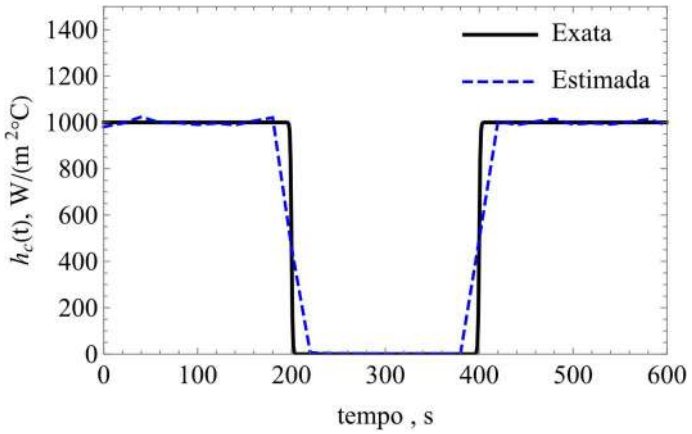
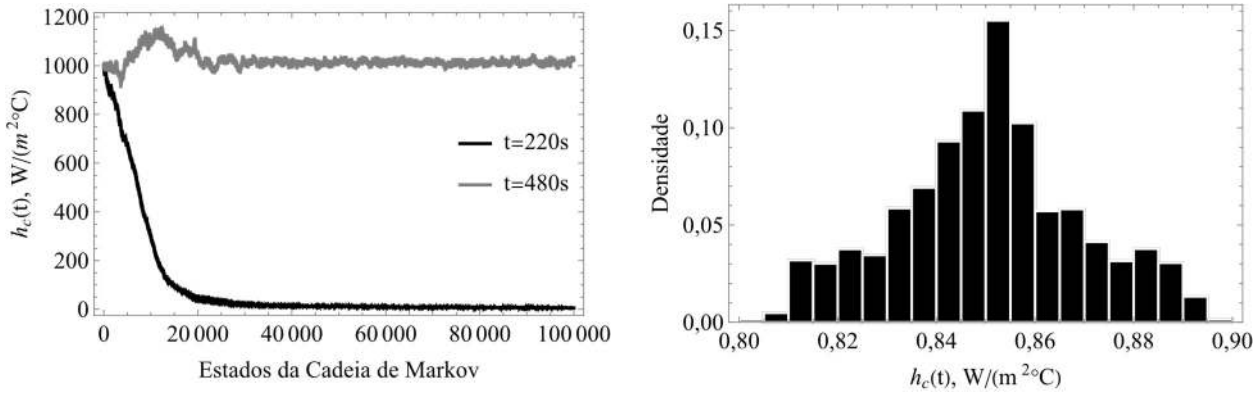


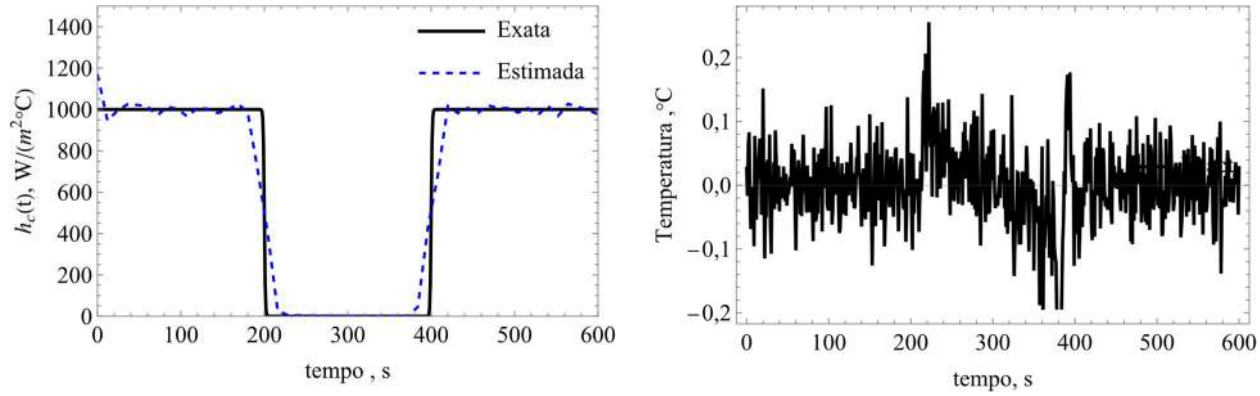
Figura 4: Perfil exato e estimado da condutância térmica, para priori de variação total, com estado inicial das cadeias de Markov em 1000W/(m^2°C) e 30 pontos discretos na função a ser estimada.



(a) (b)

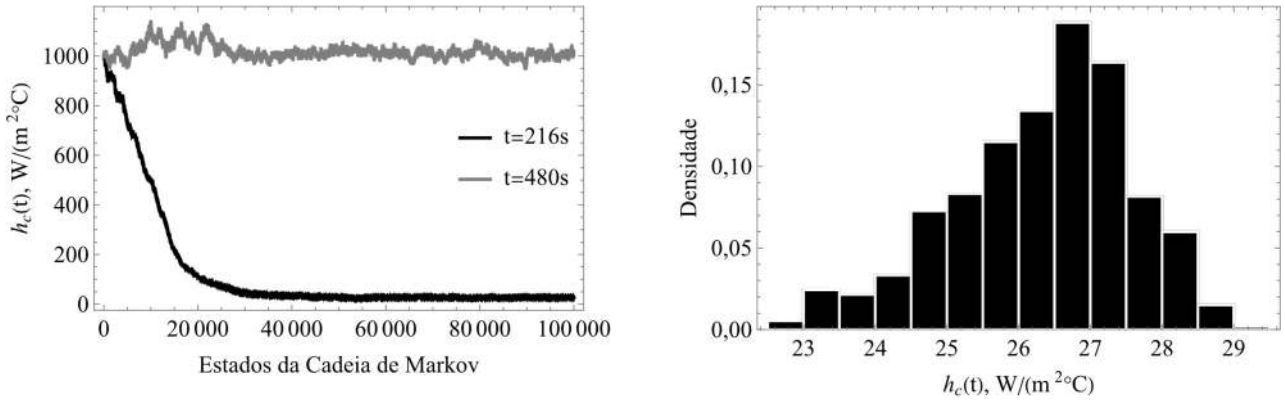
Figura 5: (a) Estados das cadeias de Markov para o Caso 2, mesmo da Fig. 4; (b) Histograma para o tempo $t = 220$ s para o Caso 2, mesmo da Fig. 4.

Num terceiro caso a ser analisado, considera-se que a condutância térmica de contato seja modelada e estimada como um vetor contendo seu valor em $N = 50$ tempos discretos. A Fig. 6 mostra o perfil de condutância térmica de contato exato e a reconstrução utilizando medidas simuladas de temperatura via método MCMC, uma priori de variação total dada pela Eq. (16).



(a) (b)

Figura 6: (a) Perfil exato e estimado da condutância térmica, para priori gaussiana centrada em 1000W/(m^2°C) e estado inicial das cadeias de Markov em 1000W/(m^2°C), com 50 pontos discretos na função a ser estimada. (b) Resíduos, calculados pela diferença entre temperaturas medidas e as temperaturas.



(a) (b)

Figura 7: (a) Estados das cadeias de Markov para o Caso 1, mesmo da Fig. 2; (b) Histograma para o tempo $t = 216$ s.

No terceiro caso, devido ao carácter mal posto do problema inverso, a solução do problema se tornou mais difícil de regularizar na medida em que um maior número de parâmetros (pontos discretos da função a ser estimada) foi adotado. Além disso, o número de parâmetros que permite a estimativa da função depende da sensibilidade da função em relação às medições e aos níveis de ruído de medição impostos. Assim, boas estimativas são mais difíceis de serem obtidas na medida em que se aumenta o número de parâmetros. Trabalhos anteriores do autor e de outros autores já exploraram estas questões com mais detalhes [7, 25, 26]. Visando possibilitar uma comparação das estimativas obtidas nos três casos estudados, calculou-se o erro RMS entre a condutância térmica de contato exata e estimada e o erro o erro RMS da estimativa de temperaturas em relação aos dados experimentais medidos. Estes erros RMS são definidos como:

$$RMS_{hc} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[h_c(t_i) - P_i]^2} \tag{22}$$

$$RMS_T = \sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\left[Y_i - T(\boldsymbol{P})_i\right]^2} \tag{23}$$

Tabela 2: Erro médio quadrático para condutância térmica de contato e para temperaturas.

	Caso 1	Caso 2	Caso3
RMS_{hc}[W/(m^2 °C)]	13,22	11,50	106,01
RMS_T[°C]	0,062	0,055	0,083

A Tabela 2 mostra o erro médio quadrático para os três casos estudados. Nos casos estudados, pode-se notar que para um mesmo número de parâmetros a ser estimado, 30 parâmetros nos casos 1 e 2, a priori não informativa *total variation* teve desempenho similar às estimativas obtidas com uma priori gaussiana centrada num valor de contato perfeito e com um desvio padrão que pode ser considerado vago, de 10 W/(m^2 °C). Nesta Tabela 2, pode-se confirmar que um maior número de parâmetros a serem estimados faz com que o erro médio quadrático seja ampliado, dado o aumento do carácter mal posto do problema inverso [26].

4 Conclusão

Neste trabalho foram aplicados a formulação de *Classic Lumped* e o método MCMC para resolução do problema inverso de estimativa da variação temporal da condutância térmica de contato. O método demonstrou desempenho satisfatório na identificação de uma função descontínua e mostra-se promissor em aplicações para identificação de falhas na interface de meios compostos quando há variação temporal da qualidade da adesão entre duas camadas. Espera-se que os resultados obtidos neste trabalho sejam ampliados para casos tridimensionais e com camadas mais espessas, envolvendo inferência Bayesiana na identificação da variação temporal e espacial da condutância térmica de contato. Os resultados obtidos mostraram, particularmente, que mesmo nas posições de descontinuidade da função testada o método se manteve acurado e captou adequadamente a variação abrupta, o que é bastante desafiador neste tipo de problema inverso envolvendo um meio multicamada.

Observou-se ainda que o método *Classic Lumped* é adequado, nos materiais particulares estudados, para modelar e estimar a condutância térmica de contato, dado que na geração de medições simuladas utilizou-se um modelo completo onde existe variação espacial das temperaturas em cada camada.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

Referências

[1] C. V. Madhusudana, *Thermal Contact Conductance*. Cham: Springer International Publishing, 2014.

[2] M. J. Colaço, e C. J. S. Alves, "A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 60, pp. 653–663, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.01.026

[3] L. A. Abreu, H. R. B. Orlande, C. Cotta, J. N. N. Quaresma, R. M. Cotta, J. P. Kaipio, e V. Kolehmainen, "Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites," em *31st Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B*, Washington, DC, USA, Jan. 2011, pp. 479–487. Disponível em: https://doi.org/10.1115/DETC2011-47511

[4] M. Grosso, J. E. C. Lopez, V. M. A. Silva, S. D. Soares, J. M. A. Rebello, e G. R. Pereira, "Pulsed thermography inspection of adhesive composite joints: computational simulation model and experimental validation," *Composites Part B: Engineering*, vol. 106, pp. 1–9, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.011

[5] J. Guo, X. N. Chen, Z. G. Qu, e Q. L. Ren, "Reverse identification method for simultaneous estimation of thermal conductivity and thermal contact conductance of multilayered composites," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 173, p. 121244, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121244

[6] D. Gay, *Composite materials: design and applications*, Third edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis, 2015.

[7] L. A. Abreu, H. R. B. Orlande, J. Kaipio, V. Kolehmainen, R. M. Cotta, e J. N. N. Quaresma, "Identification of Contact Failures in Multilayered Composites with the Markov Chain Monte Carlo Method," *J. Heat Transfer*, vol. 136, no. 10, pp. 101302–101302, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1115/1.4027364

[8] M. N. Ozisik, *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, 1993.

[9] F. A. Kulacki, *Handbook of thermal science and engineering*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2018.

[10] M. Grosso, C. A. Marinho, D. A. Nesteruk, J. M. Rebello, S. D. Soares, e V. P. Vavilov, "Evaluating quality of adhesive joints in glass-fiber plastic piping by using active thermal NDT," *SPIE Defense, Security and Sense,* Baltimore, Maryland, USA, May 2013. Disponível em: https://doi.org/10.1117/12.2016762

[11] X. Zhang, P. Cong, S. Fujiwara, e M. Fujii, "A new method for numerical simulation of thermal contact resistance in cylindrical coordinates," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 5, pp. 1091–1098, 2004. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.04.001

[12] H. Zhang, C. Shang, e G. Tang, "Measurement and identification of temperature-dependent thermal conductivity for thermal insulation materials under large temperature difference," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 171, p. 107261, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.107261

[13] T. Cui, Q. Li, Y. Xuan, e P. Zhang, "Multiscale simulation of thermal contact resistance in electronic packaging," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 83, pp. 16–24, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.04.006

[14] T. Zhou, Y. Zhao, e Z. Rao, "Fundamental and estimation of thermal contact resistance between polymer matrix composites: A review," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 189, p. 122701, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122701

[15] G. Inglese e R. Olmi, "Identification of time-varying inaccessible thermal conductance from data at the boundary," *Applicable Analysis*, vol. 101, no. 10, pp. 3576–3590, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1761017

[16] M. J. Colaço e C. J. S. Alves, "A Backward Reciprocity Function Approach to the Estimation of Spatial and Transient Thermal Contact Conductance in Double-Layered Materials Using Non-Intrusive Measurements," *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 68, no. 2, pp. 117–132, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10407782.2014.994435

[17] R. S. Padilha, M. J. Colaço, H. R. B. Orlande, e L. A. S. Abreu, "An analytical method to estimate spatially-varying thermal contact conductances using the reciprocity functional and the integral transform methods: Theory and experimental validation," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 100, pp. 599–607, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.052

[18] L. A. S. Abreu, M. J. Colaço, H. R. B. Orlande, e C. J. S. Alves, "Thermography detection of contact failures in double layered materials using the reciprocity functional approach," *Applied Thermal Engineering*, vol. 100, pp. 1173–1178, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.02.078

[19] C. R. de Lacerda, M. J. Colaço, e L. A. S. Abreu, “An extension of the reciprocity functional approach to the estimate of two-dimensional spatially dependent thermal contact conductances using regularization via TSVD: numerical and experimental results,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 40, no. 9, p. 426, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s40430-018-1344-9

[20] L. Zhuo, D. Lesnic, e S. Meng, “Reconstruction of the heat transfer coefficient at the interface of a bi-material,” *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 28, no. 3, pp. 374–401, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1574781

[21] H. R. B. Orlande e M. N. Ozisik, “Inverse problem of estimating interface conductance between periodically contacting surfaces,” *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 7, no. 2, pp. 319–325, 1993. Disponível em: https://doi.org/10.2514/3.422

[22] L. A. S. Abreu, C. J. S. Alves, M. J. Colaço, e H. R. B. Orlande, “A Non-Intrusive Inverse Problem Technique for the Identification of Contact Failures in Double-Layered Composites,” Proceedings of 15th International Heat Transfer Conference, Kyoto, Japan, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1615/IHTC15.inv.009532

[23] S. Kumar e A. Tariq, “Effects of contact-nature on transient thermal contact conductance,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 137, pp. 299–312, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.11.029

[24] M. Parikh, S. Shah, H. Vaghela, e A. K. Parwani, “A comprehensive experimental and numerical estimation of thermal contact conductance,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 172, pp. 107285, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.107285

[25] L. A. S. Abreu, H. R. B. Orlande, M. J. Colaço, J. Kaipio, V. Kolehmainen, C. C. Pacheco, e R. M. Cotta, “Detection of contact failures with the Markov chain Monte Carlo method by using integral transformed measurements,” *International Journal of Thermal Sciencies*, vol. 132, pp. 486–497, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.06.006

[26] M. N. Ozisik e H. R. B. Orlande, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, 2nd ed. CRC Press, 2021.

[27] J. Kaipio e E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, vol. 160. New York: Springer-Verlag, 2005.

[28] M. J. Colaço, H. R. B. Orlande, e G. S. Dulikravich, “Inverse and optimization problems in heat transfer,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 28, no. 1, pp. 1–24, 2006. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1678-58782006000100001

[29] H. R. B. Orlande, “Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 134, no. 3, p. 031011, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1115/1.4005131

[30] J. P. Kaipio e C. Fox, “The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer,” *Heat Transfer Engineering*, vol. 32, no. 9, pp. 718–753, 2011. Disponível em: https://doi.org/10.1080/01457632.2011.525137

[31] R. M. Cotta e M. D. Mikhaĭlov, *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. Chichester ; New York: Wiley, 1997.

[32] H. R. B. Orlande, G. S. Dulikravich, M. Neumayer, D. Watzenig, e M. J. Colaço, "Accelerated Bayesian Inference for the Estimation of Spatially Varying Heat Flux in a Heat Conduction Problem," *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 65, no. 1, pp. 1–25, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10407782.2013.812008

[33] H. R. B. Orlande, O. Fudym, D. Maillet, e R. M. Cotta, Eds., *Thermal measurements and inverse techniques*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011.

[34] O. M. Alifanov, *Inverse heat transfer problems*. Berlin ; New York: Springer-Verlag, 1994.

[35] J. V. Beck e K. J. Arnold, *Parameter estimation in engineering and science*. New York: Wiley, 1977.

[36] J. V. Beck, B. Blackwell, e C. R. St. Clair, *Inverse heat conduction: ill-posed problems*. New York: Wiley, 1985.

[37] F. Colin, H. Heikki, e C. J. Andrés, "Inverse problems," in *Bayesian Theory and Applications*, P. Damien, P. Dellaportas, N. G. Polson, and D. A. Stephens, Eds. Oxford University Press, 2013, pp. 619–643.

[38] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven, CT: Yale University Press, 1923.

[39] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, 3rd ed. 2017. Cham: Springer International Publishing : Imprint: Springer, 2017.

[40] D. Colton e R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Fourth edition. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019.

[41] D. Gamerman e H. F. Lopes, *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*, 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2006.

[42] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, e E. Teller, "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092, 1953. Disponível em: https://doi.org/10.1063/1.1699114

[43] W. K. Hastings, "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications," *Biometrika*, vol. 57, no. 1, pp. 97–109, 1970. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2334940

[44] H. Massard da Fonseca, H. R. B. Orlande, O. Fudym, e F. Sepúlveda, "A statistical inversion approach for local thermal diffusivity and heat flux simultaneous estimation," *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 170–189, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1080/17686733.2014.947860