VETOR

Análise por CFD do Escoamento no Impelidor de uma Turbobomba

CFD Analysis of the Flow in the Impeller of a Turbopump

Henrique Massard da Fonseca[1,†], Rhuan Dornas da Silva[1]

[1]*Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Brasil*

[†]**Autor correspondente:** henriquemf@id.uff.br

Resumo

Bombas centrífugas são amplamente utilizadas nos mais diversos setores, como industrial, agrícola, residencial, dentre outros. Em algumas aplicações, esses dispositivos são usados continuamente, resultando em uma parcela significativa do consumo energético. Portanto, melhorar a eficiência desses dispositivos é de grande benefício para a redução de custos. O presente trabalho utilizou a técnica de fluidodinâmica computacional (CFD) para projetar o impelidor de uma turbobomba, de forma a obter a máxima altura manométrica para o fluido sendo bombeado. O software Ansys® foi utilizado para a obtenção dos resultados simulados utilizando o modelo de turbulência $k-\varepsilon$. Neste trabalho não foi considerada a interação do impelidor com a carcaça. Os parâmetros geométricos e o número de pás de um impelidor pré-definido foram alterados para obter a configuração que fornecesse o maior *head*. Um aumento de aproximadamente 12 % no *head* fornecido pelo impelidor foi obtido quando o número de pás no impelidor foi aumentada de 6 para 13.

Palavras-chave

Fluidodinâmica Computacional • Turbomáquinas • Análise Numérica

Abstract

Centrifugal pumps are widely used in a myriad of applications, such as industry, agriculture, and residential, among others. These devices are often used nonstop, thus playing an important role in energy consumption. Therefore, the improvement of the design of these devices results in dramatic cost reduction. The present work used Computational Fluid Dynamic (CFD) as a tool for designing the impeller of a turbopump. The main objective was to obtain the maximum head provided to the fluid being pumped. The Ansys® software was used to obtain the simulated results. The turbulence model used was the $k-\varepsilon$. In this work the interaction between the impeller and the casing was not considered. Both the geometric parameters and the number of blades of a predefined impeller

configuration were modified to obtain the maximum head. A 12% increase in the head provided by the impeller was obtained when the number of blades was increased from 6 to 13.

Keywords

Computational Fluid Dynamics • Turbomachines • Numerical Analysis

1 Introdução

As bombas centrífugas são dispositivos extensivamente utilizados em diversas aplicações industriais, residenciais e muitos outras. Isto se deve à ampla faixa de vazão e *head* que esses dispositivos podem fornecer. Assim, mesmo pequenos aumentos da eficiência na conversão de energia elétrica para energia hidráulica podem ter consequências globais relevantes. É importante destacar que ao longo deste trabalho o termo *head* será usado para denotar a energia por unidade de peso o impelidor fornece ao fluido. Esta escolha se justifica, pois, este termo, mesmo não traduzido, é utilizado de forma corrente no estudo de turbomáquinas.

Atualmente, devido ao grande aumento da capacidade dos computadores, a análise e otimização dos impelidores de turbomáquinas utilizando fluidodinâmica computacional se tornou viável. Um breve histórico desse desenvolvimento será feito a seguir.

Os primeiros estudos desta linha de pesquisa foram encontrados pelos autores deste trabalho a partir de década de 70. O desenvolvimento da técnica até os dias atuais ocorreu em uma série de etapas ao longo dos anos. Surgiu primeiramente como simplificação das soluções de Euler *quasi*-tridimensional, onde limitações envolviam simulações para condições de operações perto do ponto de máxima eficiência [1]. Posteriormente simulações em regime permanente utilizando o método de *Reynolds Averaged Navier Stokes* (RANS) para uma pá do impelidor foram realizadas, e finalmente se estendendo a simulações de todo dispositivo [1]–[6].

Entre 1987 e 1994, com base na revisão de literatura realizada pelos autores, o desenvolvimento completo das equações de Euler tridimensionais possibilitou modelar escoamentos fora do ponto de máxima eficiência, contanto que o escoamento não fosse dominando por efeitos viscosos [1]. Entre 1990 e 2000 com o surgimento e aprimoramento do método de RANS, estudos com considerações e efeitos turbulentos foram realizados [1]. A partir desse momento, a técnica CFD passou a contemplar análises de perdas, análises de camada limite e análises com desaceleração dos fluidos, permitindo assim o estudo completo de componentes como a voluta de uma bomba centrifuga [1], [5].

Atualmente, alguns artigos, dissertações e teses apresentaram os resultados da simulação por CFD do escoamento por turbomáquinas. A dissertação de mestrado de Dunaiski [7] apresenta resultados da simulação por CFD do escoamento pelo rotor de uma turbobomba. A geometria do modelo utilizada pelo autor foi obtida por meio de escaneamento a laser do rotor de uma bomba comercial. Assim foi possível comparar seus resultados numéricos com as curvas fornecidas pelo fabricante do rotor analisado. O modelo de turbulência utilizado pelo autor foi o k - ε. O erro médio dos resultados simulados comparados com os dados experimentais foi da ordem de 6,8 %. O autor utilizou a lei log para a função de parede nas simulações apresentadas.

No trabalho desenvolvido por Chalghoum et al. [5], os autores desenvolveram a solução numérica do escoamento por todo conjunto impelidor e carcaça da bomba. Foram analisados os seguintes modelos de turbulência: k - ε, o SST (transporte de tensão cisalhante) e o SST-CC (com correção de curvatura). Os autores usaram dados experimentais de pressão coletados na carcaça da bomba para validar seus resultados numéricos e obtiveram boas concordâncias de maneira geral. Segundo os autores, o modelo de turbulência SST foi ligeiramente melhor que os outros no ponto de melhor eficiência da bomba.

Wu et al. [6] também desenvolveram a solução numérica para o estudo do escoamento por todos os componentes de uma bomba. O modelo de turbulência usado pelos autores foi o k - ε. Os autores se basearam nas curvas *head* vs. vazão e eficiência vs. vazão para validar a solução numérica.

Rosa e Emerick [2] analisaram a quantidade de pás no rotor de uma turbobomba usando simulação por CFD. Dois impelidores, um com 6 e outro com 10 pás foram modelados e os resultados numéricos mostraram que o impelidor com 10 pás foi o que apresentou maior eficiência. Posteriormente, esses mesmos autores analisaram a influência de pás intermediárias no impelidor da turbobomba usando CFD [3]. O modelo de turbulência adotado pelos autores neste artigo foi o SST.

No presente trabalho, a técnica CFD foi utilizada para compreender os efeitos da alteração da curvatura da lâmina do impelidor no desempenho de uma bomba centrífuga. Outro aspecto analisado aqui foi o número de pás do impelidor. O sistema fluidodinâmico desenvolvido foi um impelidor de uma bomba centrifuga de único estágio e com escoamento monofásico de água na temperatura ambiente e pressão atmosférica. O modelo de turbulência adotado foi o k - ε com a função de parede lei log. Para este trabalho, o software Ansys® foi utilizado nas simulações numéricas. O módulo Bladegen® foi utilizado para a geração da geometria da pá do impelidor, e o formato padrão presente neste módulo foi usado como o caso base (ou caso padrão), sobre o qual a otimização foi feita. O módulo Turbogrid® foi utilizado na geração das malhas para os casos simulados.

2 Modelagem matemática e computacional

A partir das equações de Navier-Stokes e das hipóteses simplificadores, a equação de que descreve o movimento turbulento será desenvolvido nesta seção. Esta é a análise usada por programas de fluidodinâmica computacional (CFD), como o Ansys®, que foi utilizado no presente estudo.

2.1 Turbulência

Escoamentos turbulentos possuem características particulares que englobam a sua complexidade. São de difícil predição determinística, tridimensionais e aleatórios. Além disso são altamente difusivos, ou seja, a turbulência aumenta muito o poder de difusão do escoamento: a mistura de massa, energia e quantidade de movimento é muito mais eficiente nesse regime de escoamento. A turbulência só pode ocorrer em escoamento rotacionais, e é altamente dissipativa, e por isso exige fornecimento contínuo de energia. De forma geral, as menores escalas da turbulência (as escalas dissipativas de Kolmogorov) são muito maiores que as escalas características dos movimentos moleculares, e por isso a modelagem realizada com a hipótese do contínuo é válida [8], [9].

Devido ao caráter altamente aleatório dos escoamentos turbulentos, a modelagem computacional dessa classe de problema sempre impôs grandes desafios. Atualmente os computadores pessoais permitem a análise de problemas relativamente complexos, e inimagináveis há alguns anos. Entretanto, uma metodologia geral para a modelagem de escoamentos turbulentos ainda não está disponível na literatura, e diversos trabalhos nesta área vêm sendo desenvolvidos para permitir o tratamento das equações que governam o problema [8], [10]–[14].

De forma geral, existem diversas estratégias para o tratamento das equações de movimento no regime turbulento, dentre as quais se caracterizam a DNS (*direct numerical simulation*) ou simulação numérica direta, a LES (*large eddy simulation*), ou simulação de grandes escalas e a RANS (Reynolds avereged Navier Stokes) ou Navier Stokes resolvida pela média de Reynolds. A solução DNS resolve a equação de Navier Stokes diretamente. Esta estratégia é extremamente custosa computacionalmente, uma vez que a simulação de todas as escalas da turbulência é complexa [15]. Do ponto de vista de custo computacional, a LES é uma estratégia menos custosa, mas que descreve o escoamento com uma certa aproximação. Nesta estratégia, as grandes escalas são completamente resolvidas, enquanto as menores escalas são modeladas [11]. Finalmente, a estratégia menos custosa computacionalmente é a RANS, onde a equação de Navier-Stokes é resolvida pela média proposta por Reynolds. Neste método, parâmetros adicionais que aparecem na equação resultante da média são resolvidos por modelos adicionais de turbulência.

Como o modelo que foi utilizado neste trabalho é baseado na estratégia de RANS, será feita uma breve descrição envolvendo os conceitos dessa metodologia de solução do escoamento turbulento. Ela se baseia no fato de que para muitos fenômenos de interesse no escoamento turbulento de fluidos, basta conhecer o valor médio das variáveis [16]. A decomposição de Reynolds é obtida definindo-se as propriedades do escoamento como a soma de um valor médio mais uma flutuação. Por exemplo, para a velocidade temos a expressão dada pela Eq. (1):

$$u = \bar{u} + u', \tag{1}$$

onde a barra representa o valor médio e u' representa as flutuações instantâneas [16]. Com isso, tem-se separadamente as propriedades do escoamento turbulento em termos de soluções bem-comportadas de $\bar{u}$ e de contribuições flutuantes de caráter complexo representados por u'. O conjunto de equações que descrevem o método de RANS pode ser obtida das equações de Navier-Stokes pela aplicação do operador média temporal, conforme demonstrado na Eq. (2):

$$\bar{\boldsymbol{u}}(x) \equiv \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)dt, \tag{2}$$

onde T é um intervalo de tempo suficientemente longo para que a média represente o comportamento estacionário do escoamento [16]. A técnica de passagem da média de Reynolds consiste em dois passos: 1) As variáveis que aparecem nas equação do movimento são decompostas em partes médias e flutuantes; e 2) É aplicado o operador média temporal, dado pela Eq. (2), em um intervalo de tempo finito nos termos resultantes. Os termos da equação de Navier-Stokes, como a velocidade, a pressão e a massa específica podem ser descritos em termos da decomposição da soma apresentado pela Eq. (1). O resultado dessa operação para a continuidade é apresentado na Eq. (3), da forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{3}$$

onde $\bar{u}_i$ representa os componentes do vetor velocidade médio nas i direções dos eixos coordenados x_i. Com isso é possível observar que a componente estacionária do escoamento também é incompressível [16].

A aplicação da mesma operação na equação que descreve a quantidade de movimento linear no movimento de fluidos newtonianos resulta na Eq. (4) [8], [11], [13], [14], dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + \overline{u_i' u_j'}\right], \tag{4}$$

onde t representa o tempo, i e j são subíndices da notação indicial, ρ é a massa específica do fluido em análise e ν é a viscosidade cinemática do fluido em análise. A Eq. (4) é chamada de RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) ou Navier-Stokes resolvida pela média de Reynolds. A derivação completa da Eq. (4) é demonstrada com detalhes em excelentes livros texto, muitos deles por consolidados grupos brasileiros de pesquisa, conforme apresentado em [8], [9], [11], [14]–[16].

Como comentado anteriormente, a solução obtida pela Eq. (4) é uma das estratégias de modelagem de escoamentos turbulentos, essa particularmente com relativo baixo custo computacional, mas necessitando de aproximações adicionais para sua solução. Isto se deve ao fato do termo $\overline{u_i' u_j'}$, que é justamente a contribuição turbulenta (observe que todos os outros termos da Eq. (4) são médias) aparecer na equação resultante. Este termo é chamado de tensão de Reynolds, apesar de fisicamente não representarem tensões. O termo $\overline{u_i' u_j'}$ representa o transporte médio de quantidade de movimento devido às flutuações turbulentas de velocidade [16]. Esse termo é um tensor, que no caso tridimensional possui 6 componentes, representando todas as possíveis médias de combinações de flutuações das velocidades nas 3 direções do escoamento.

O problema com relação à essa estratégia é justamente o aparecimento do termo referente à tensão de Reynolds, que resulta em mais variáveis independentes para o caso turbulento, que agora são as três componentes da velocidade média, a pressão e os 6 componentes do tensor tensão de Reynolds (para o caso incompressível e levando em conta a simetria do tensor de Reynolds). Assim, o número total de incógnitas, 10, é maior que as 4 equações disponíveis para a descrição do movimento dos fluidos.

Por isso, para resolver problemas turbulentos usando a estratégia de RANS, é imperativo a obtenção de um novo conjunto de equações que relacione as grandezas médias às grandezas instantâneas. Este é o chamado de problema de fechamento em turbulência. O problema é então o fornecimento de um método para determinar $\overline{u_i' u_j'}$. Uma das formas, dentre outras, é pelo conceito de viscosidade turbulenta, e será brevemente descrita a seguir.

Esse método propões uma analogia entre os fenômenos de transferência de quantidade de movimento molecular e turbulento. Ou seja, essa técnica propõe aproximar o termo $\overline{u_i' u_j'}$ conforme descrito na Eq. (5) [8]:

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \tag{5}$$

onde a ideia é relacionar $\overline{u_i' u_j'}$ a gradientes de velocidade do escoamento médio através de uma viscosidade turbulenta ν_t a ser determinada. Modelos seguindo esta estratégia são conhecidos como modelos de viscosidade turbulenta. Esta é a base do método $k - \varepsilon$, que foi utilizado para a solução do problema proposto neste trabalho, e será brevemente descrito a seguir. Para uma discussão mais detalhada, as referências apresentadas anteriormente podem ser consultadas. É importante enfatizar que ν_t não é uma propriedade física do fluido, mas sim uma medida local do nível de turbulência, variando de ponto a ponto e de escoamento para escoamento.

Ao longo dos últimos anos, uma forma generalizada da Eq. (5) tem sido um dos métodos mais empregados para a previsão de escoamentos turbulentos através da relação apresentada na Eq. (6), que é conhecida como a hipótese de Boussinesq [8]:

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \tag{6}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e k é a energia cinética das flutuações de velocidade, também conhecida como energia turbulenta. Introduzindo este termo na Eq. (4), obtém-se a Eq. (7):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\upsilon + \upsilon_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \overline{u_i' u_j'} \right], \tag{7}$$

onde observa-se claramente a transferência de quantidade de movimento molecular e turbulento ocorrendo de modo análogo. Modelos seguindo essa hipótese avaliam ν_t usando desde simples relações algébricas até equações diferenciais. É justamente a aproximação desse parâmetro do escoamento que trata as diferentes estratégias de modelagem do escoamento turbulento. Nesse ponto, aproximações de zero, uma e duas equações são largamente utilizadas [11] e as expressões descrevendo esse parâmetro se diferenciam na maneira como as diferentes características físicas do escoamento turbulento são calculados.

O método $k - \varepsilon$ se baseia na aproximação do tensor de Reynolds pela resolução de duas equações diferenciais de transporte, uma para a energia cinética turbulenta k e outra para a dissipação de energia cinética turbulenta ε. A Eq. (8) representa a expressão para a enérgica cinética turbulenta [8]:

$$\frac{\mathrm{D}k}{\mathrm{D}t} = P_k + D_k + \varepsilon_k, \tag{8}$$

onde $\mathrm{D}k/\mathrm{D}t$ representa a derivada total de k, o termo D_k representa o transporte de k por difusão, o termo P_k representa o termo de produção e ε_k representa a taxa de dissipação viscosa de k.

Tal como no caso da energia cinética turbulenta apresentada na Eq. (8), a equação exata para o transporte de dissipação viscosa (ε) pode ser obtido diretamente da equação de Navier-Stokes, e é dada pela Eq. (9):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = P_\varepsilon + D_\varepsilon + d_\varepsilon, \tag{9}$$

onde $\partial\varepsilon/\partial t$ é a concentração transiente de ε no volume de controle, $\bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}$ é o transiente convectivo devido ao movimento do fluido, D_ε é a difusão de ε devido ao seu gradiente ao longo do volume de controle, P_ε é a produção de ε, ou seja, a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o campo turbulento e d_ε é a destruição de ε [8].

As equações exatas de transporte de ε possuem grande número de incógnitas, além de correlações duplas de flutuações de velocidade. Como a solução exata é de difícil obtenção, a técnica de analise dimensional é usada em cada termo da Eq. (9), bem como na interpretação dos processos físicos envolvidos [8].

De posse da solução para ε e k, obtidos pelas Eqs. (8) e (9), a viscosidade turbulenta é obtida pela Eq. (10):

$$\nu_t = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon}, \tag{10}$$

onde C_μ é um parâmetro empírico. Cabe ressaltar que essa solução não implica em uma generalidade desses modelos, que ainda assim apresentam grandes limitações práticas em termos de implementação [8]. Outro aspecto importante a ser mencionado é que o modelo $k - \varepsilon$ foi utilizado neste trabalho por ser uma estratégia extensivamente utilizada na literatura, tendo sido validada por diversos grupos de pesquisa e por empresas desenvolvedoras de programas de simulação multifísica, como a Ansys®.

Para o sucesso do processo de modelagem de turbulência, é importante reconhecer o comportamento do escoamento por todo domínio. O escoamento turbulento é dominado por forças inerciais, mas em regiões próximas de paredes sólidas existe uma região dominada por forças viscosas. De forma geral, nas vizinhanças de sólidos o escoamento possui três regiões com comportamentos característicos, que são [17]: uma região adjacente à parede, com uma camada viscosa delgada; uma região intermediária; e a região invíscida, longe da parede. Isto ocorre pela condição de não deslizamento na interface entre o fluido e a parede sólida.

Do ponto de vista estritamente numérico, não haveria problema em desenvolver uma malha suficientemente refinada para analisar todas essas camadas. Entretanto, dependendo do tamanho do domínio computacional, esse refinamento pode tornar o custo computacional proibitivo. Dessa forma, softwares comerciais, como o Ansys® adotam duas estratégias de análise [18]: (i) resolver a região próxima à parede como uma função empírica [15], [17]–[20] e (ii) refinar toda a malha.

A estratégia adotada no presente trabalho foi a de utilizar funções empíricas na região dominada por efeitos viscosos, próxima à parede. Essas funções empíricas são denominadas leis de parede. O perfil de velocidade nessa região é obtida pela técnica de Análise Dimensional [15], [17]–[20]. A demonstração detalhada desta análise pode ser obtida nas referências sobre turbulência e camada limite apresentadas neste trabalho. As equações adimensionais resultantes relacionam uma distância adimensional y^+ com um termo de velocidade adimensional u^+. Para o escoamento interno, o termo u^+ é dado pela Eq. (11):

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau}, \tag{11}$$

onde U representa a velocidade de corrente livre na região invíscida e $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ representa a velocidade de atrito. τ_w é a tensão de cisalhamento na parede.

O termo y^+ (para escoamentos internos) é dado pela Eq. (12):

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}, \tag{12}$$

onde μ e ρ são a viscosidade dinâmica e a massa específica do fluido respectivamente. y é a distância com relação à parede.

A Figura 1 apresenta o resultado do gráfico da velocidade adimensional versus a distância adimensional com relação à parede, relacionando a grandezas adimensionais u^+ e y^+ para escoamentos internos. Observa-se que para regiões próximas à parede (subcamada viscosa), onde $y^+ < 5$, o comportamento é linear, podendo-se demonstrar que nessa região o perfil de velocidade é dado pela Eq. (13)

$$u^+ = y^+, \tag{13}$$

para paredes lisas [15], [17]–[20].

Para as regiões mais afastadas das paredes lisas ($30 < y^+ < 500$) tanto as forças viscosas quanto as inerciais influenciam o comportamento do escoamento. Nesta região, pode-se demonstrar que a relação entre u^+ e v^+ é dada pela Eq. (14) [15], [17]–[20]

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+), \tag{14}$$

onde κ é constante de von Karman, sendo aproximadamente 0,4 e $E \approx 9{,}8$ para tubos lisos. Devido à relação logarítmica entre u^+ e y^+, esta subcamada é geralmente denominada de subcamada lei log.

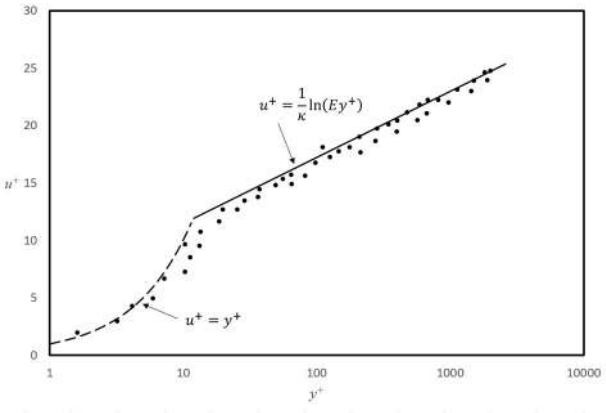


Figura 1: Perfil de velocidade próximo à uma parede sólida [17].

Ainda com relação à Figura 1, pode-se observar a excelente concordância entre dados experimentais (círculos pretos) e os modelos para a lei de parede, dadas pelas Eqs. (13) e (14) [17].

Essas relações simplificadas apresentadas para paredes lisas são apresentadas em detalhas para outras geometrias e rugosidades em [19], gerando para cada caso uma relação $u^+ = f(y^+)$ específica.

2.2 Solução Numérica

Para obter a solução das equações que descrevem o movimento dos fluidos, uma aproximação numérica deve ser adotada onde as equações diferenciais são calculadas por aproximações algébricas e serem resolvidas por métodos numéricos. O Ansys® usa o método baseado em volumes finitos, o que envolve discretizar o domínio do sistema em uma malha. A malha é utilizada para construir os elementos finitos, e esses são usados no cálculo da continuidade, momentum e energia, quando este for o caso, em cada ponto da geometria [18].

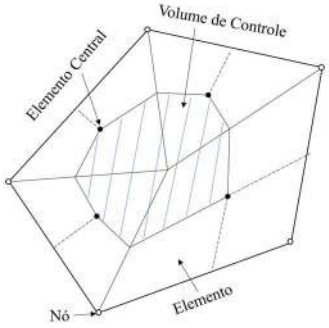


Figura 2: Elemento de malha do software Ansys ® [18].

A Figura 2 é uma representação da discretização de uma malha típica do Ansys. Todas as variáveis da solução e propriedades do fluido que está escoando são calculadas em cada um dos nós. Um volume de controle é construído ao redor do ponto médio entre o ponto central dos nós.

As equações que descrevem o movimento do fluido são integradas para o volume de controle apresentado na Figura 2. Posteriormente discretiza-se a integral de volume e de superfície para resolução do algoritmo numérico. A Figura 3 apresenta um elemento de malha particular, onde as equações que regem o movimento do fluido são resolvidas de forma discreta.

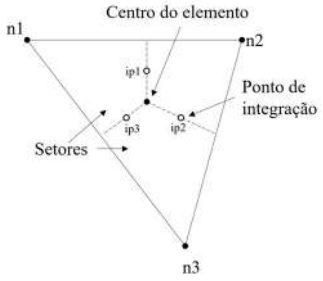


Figura 3: Elemento de malha do Ansys ® [18].

O Ansys® utiliza volumes de malha de variados formatos para avaliação das variáveis e propriedades do fluido no domínio definido. Podem ser hexagonais, tetraédricas, piramidais ou cônicas de base quadrada. Para o presente trabalho foi utilizado malha hexagonal, conforme a Figura 4.

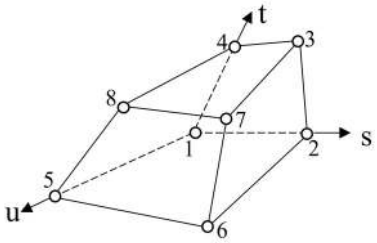


Figura 4: Elemento de malha hexagonal [18].

3 Materiais e Método Computacional

Nesta seção serão apresentadas as etapas realizadas desde a construção da geometria da pá até a obtenção de resultados. O recurso computacional utilizado foi uma máquina com processador Core I7 de 9ª geração e 16 GB de RAM. O dispositivo modelado foi um impelidor de uma bomba centrifuga de único estágio com lâmina simples com parâmetros geométricos descritos na Tabela 1. Esses dados são os valores *default* do módulo Turbogrid®.

Tabela 1 : Parâmetros da geometria do impelidor.

Parâmetro (unidade)	Valor
Altura da lâmina (m)	0,05
Raio de entrada, r_1 (m)	0,049
Raio de saída, r_2 (m)	0,2
Ângulo de saída, β_2 (º)	23
Ângulo de entrada, β_1 (º)	0

Os valores das variáveis apresentadas na Tabela 1 podem ser vistos em um esquema de impelidor, conforme apresentado na Figura 5.

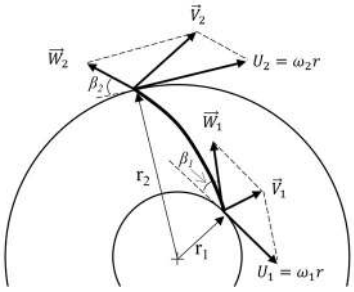


Figura 5: Geometria de um impelidor típico [21].

A geometria do impelidor usado no problema desenvolvido no presente trabalho foi desenvolvida no módulo Bladegen® do Ansys®. Este módulo do programa permite definir a geometria a partir do plano meridional do impelidor, conforme visto na Figura 6.

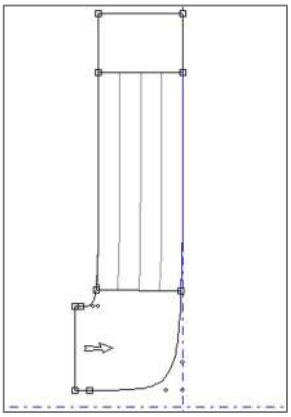


Figura 6: Tela do Bladegen® com o plano meridional do impelidor

Para isso são fornecidas as dimensões do impelidor, como raios de entrada e saída, espessura da lâmina e ângulos de entrada e saída da lâmina, parâmetros estes apresentados na Tabela 1. O valor de seis lâminas foi definido para o protótipo base, ou o caso padrão sobre o qual a otimização será feita. Foi padronizado o valor de dois milímetros para a espessura da lâmina para todos os casos simulados.

Uma vez definida a geometria do impelidor, utilizou-se o modulo Turbogrid® do Ansys® para geração da malha, conforme apresentado na Figura 7.

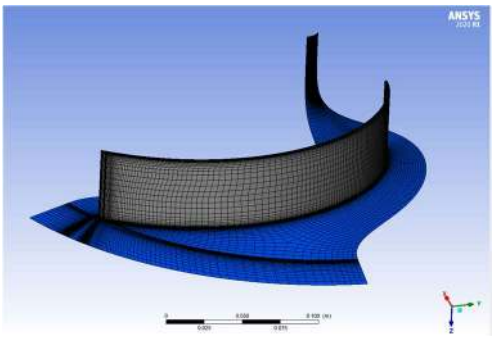


Figura 7: Geometria da pá do impelidor com a malha.

Como o domínio de análise é simétrico em relação ao eixo de acionamento do impelidor, a simulação foi processada utilizando apenas uma fração da circunferência do impelidor. Em seguida os resultados foram extrapolados para as demais porções. Essa técnica, fornecida pelo modulo Turbogrid ®, permite a redução do esforço computacional, reduzindo assim tempo de simulações. Vale ressaltar que essa alternativa é possível apenas em simulações numéricas onde todo o conjunto é simétrico. Caso o estudo englobasse o impelidor e a voluta da bomba, esta estratégia não seria válida.

Após a geração da malha, o módulo CFX ® foi utilizado para a simulação computacional. Neste módulo os dados de entrada para o modelo foram a vazão volumétrica de 0,1 m^3/s, velocidade de rotação da lâmina de 1750 rpm, modelo de turbulência $k - \varepsilon$ e a intensidade da turbulência médio. O fluido de trabalho foi água a 25 ^oC.

A etapa de pós processamento inclui a análise do campo de velocidade e pressão e o valor do *head* desenvolvido pelo impelidor. É importante ressaltar que a versão do Ansys® utilizada nesta análise limita o número de nós a 512 mil. Como a malha gerada nesta análise estava com menos nós que este valor, as simulações puderam ser desenvolvidas. Uma análise de convergência da malha foi realizada, e será apresentada na seção de resultados.

Neste trabalho, foi usada a solução clássica obtida a partir do triângulo de velocidades como a solução *benchmark*, ou solução de referência. Esta solução é obtida pela aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds em uma geometria típica do impelidor de uma turbomáquinas, conforme apresentado em [21]. O resultado dessa análise fornece uma relação entre o *head* que é fornecido para uma determinada geometria do impelidor. Existem severas limitações dessa estratégia, as principais residem no fato da viscosidade ser desprezada, além de todas as interações entre a entrada e a saída do fluido não serem consideradas. De qualquer forma, este resultado é importante para verificar a solução numérica, ou seja, a solução via equação de Euler das turbomáquinas é a máxima energia teórica possível que o impelidor pode fornecer ao fluido. A derivação completa desta relação pode ser encontrada em [21], e o resultado final é apresentado na Eq. (15)

$$H = \frac{U_2 V_{t2}}{g}, \tag{15}$$

onde U_2 representa a velocidade tangencial na saída do impelidor, dado por ωr_2 e V_{t2} é a projeção tangencial do vetor velocidade absoluto na saída do impelidor. Para os valores do impelidor modelado no presente trabalho, o *head* teórico foi de aproximadamente 123 metros.

4 Resultados e discussões

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações realizadas com diferentes parâmetros geométricos, a fim de se obter não somente a otimização do *head*, mas também o escoamento com o mínimo de recirculação. Os casos simulados contemplaram o efeito da variação do número de pás e da curvatura da pá ao longo do escoamento. O número de pás para o modelo padrão foi de 6 e foi denominado caso 1. A curvatura da pá é definida pelos ângulos de entrada e saída da lâmina, e por dois pontos intermediários a esses. Os ângulos de entrada e saída da lâmina não foram alterados para as demais simulações, para fins de comparação com os valores obtidos pela equação das turbomáquinas de Euler, Eq. (15). Os dois pontos intermediários foram alterados entre as diferentes simulações para verificar o efeito da mudança da curvatura da lâmina. Os pontos de parametrização das pás do impelidor podem ser vistos de forma resumida na Tabela 2 para os casos estudados. Para o caso 2 manteve-se a geometria da pá com relação ao modelo padrão (caso 1), e aumento de 6 para 13 pás. O caso 3 manteve-se o número de pás com relação ao modelo padrão (caso 1), com alteração dos parâmetros geométricos das pás. No caso 4 tanto o número quanto a geometria das pás foram alteradas.

Tabela 2: Parâmetros dos casos simulados.

Caso 1 (6 pás)		Caso 2 (13 pás)		Caso 3 (6 pás)		Caso 4 (13 pás)	
Posição da lâmina (%)	Ângulo (º)	Posição da lâmina (%)	Ângulo (º)	Posição da lâmina (%)	Ângulo (º)	Posição da lâmina (%)	Ângulo (º)
0	55	0	55	0	55	0	55
22	37	22	37	7,4	55	7,4	55
69	28	69	28	32,9	32	32,9	32
100	23	100	23	100	23	100	23

A partir das coordenadas dos 4 pontos e seus respectivos ângulos, conforme apresentado na Tabela 2, o software constrói a curvatura da pá interpolando os demais pontos. O perfil gerado pela lâmina para o caso 1 e 2 estão apresentados na Figura 8.

Para a análise da quantidade de nós na malha, um teste de convergência foi realizado. A Tabela 3 apresenta os resultados da análise de convergência. Estes resultados foram obtidos com os parâmetros do caso 1 (Tabela 2).

No cabeçalho da Tabela 3, a coluna simulação representa a variação do número de nós na malha analisada. A segunda coluna apresenta o número de nós e a terceira coluna apresenta o *head* calculado usando os nós estipulados. A quarta coluna apresenta a diferença percentual entre o *head* calculado com o máximo de nós e o *head* da malha que se deseja analisar. A quinta coluna apresenta o tempo computacional necessário para obter a solução com a respectiva malha e a última coluna representa a diferença percentual entre o resultado do respectivo *head* para o *head* teórico calculado com a equação de Euler.



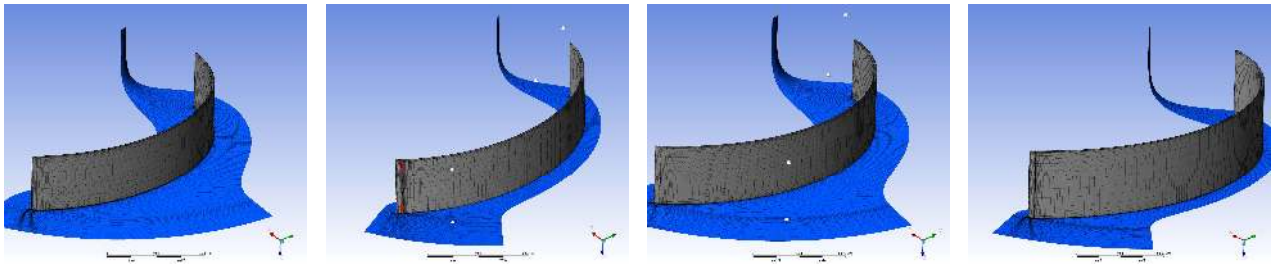
Figura 8: Perfil da pá para os casos 1 e 2 conforme dados da Tabela 1.

Observa-se pela Tabela 3 que as seis primeiras malhas divergem em no máximo 1,40% em relação à simulação com o máximo número de nós. Como o tempo computacional é drasticamente menor para a malha 6 (aproximadamente 12 minutos) do que os quase 90 minutos necessários para a simulação com os 512000 nós, o número mínimo de 100.000 foi o escolhido para as simulações apresentadas nos resultados a seguir. É importante destacar que o número de nós é um fator indireto no programa, ou seja, em função de outras configurações para a malha, como o tamanho máximo do elemento e a própria geometria, o Ansys® automaticamente constrói a malha que melhor se adequa àquelas condições. Por isso o número de nós não pode ser fixado, e cada um dos casos apresentados na Tabela 3 foi usado como referência para os resultados obtidos para cada um dos casos que foram estudado, conforme demonstrado na Tabela 2. A malha utilizada nas simulações está representada na Figura 9 para cada um dos casos analisados.

Tabela 3: Teste de convergência da malha.

Simulação	Nós na malha	*Head* (m)	Dif. *head* para a malha 0 (%)	Tempo (hh:mm:ss)	Dif. *head* Euler (%)
Malha 0	510.000	92,1	0,00%	01:27:45	25,10%
Malha 1	407.000	93,4	1,39%	01:09:04	24,06%
Malha 2	351.000	92,9	0,91%	01:12:50	24,42%
Malha 3	298.000	92,8	0,80%	00:49:01	24,50%
Malha 4	202.000	93,1	1,05%	00:34:03	24,32%
Malha 5	164.000	93,4	1,41%	00:29:43	24,05%
Malha 6	101.000	93,4	1,46%	00:12:41	24,01%
Malha 7	49.000	94,9	3,11%	00:03:49	22,77%

Para fins de comparação, será apresentado o resultado do modelo padrão (caso 1) ao qual desejou-se efetuar a otimização, com os parâmetros geométricos apresentados na Tabela 2, caso 1 e na Tabela 1. Os resultados preliminares são os da primeira linha da Tabela 3. Para este caso padrão foram usados parâmetros de malha que fossem próximos do número máximo de nós permitidos pela versão *student* do Ansys®, ou seja 512000 nós.



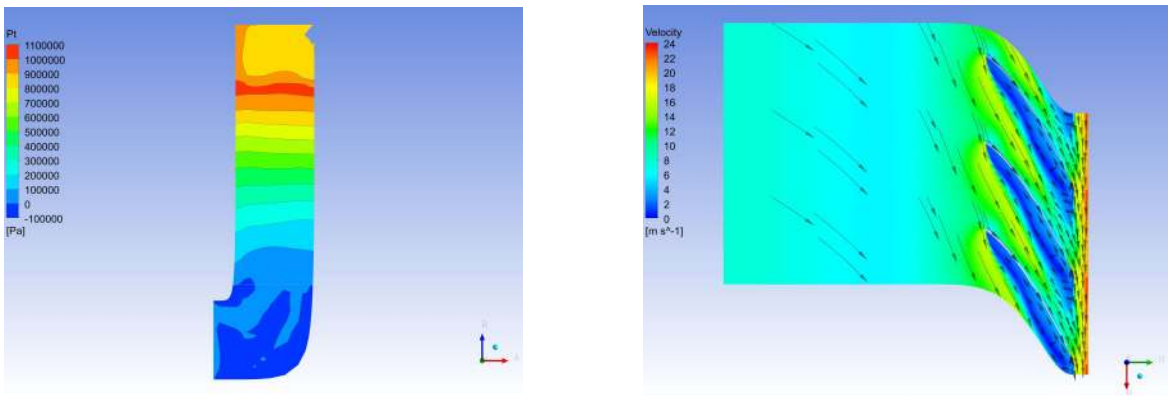
(a) (b) (c) (d)

Figura 9: Malha utilizada nas simulações dos casos (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3 e (d) caso 4.

A Figura 10 (a) é o resultado da modelagem do campo de pressão ao longo da pá, que se apresenta de forma relativamente uniforme, com aumentos graduais da pressão ao longo de sua trajetória. A escala de cores está apresentada ao lado da figura, onde pode-se observar a variação da pressão manométrica de -10^5 até 11×10^5 Pa. Na porção inferior do plano meridional, os tons de azul escuro representam pressões inferiores, da ordem do vácuo até zero, enquanto as maiores pressões são encontradas na saída da lâmina, denotado com as cores laranja, amarelo e vermelho. Este comportamento representa fisicamente o que se espera pelo escoamento ao longo da pá, ou seja, a redução na pressão para valores abaixo da pressão atmosférica na sucção para a admissão de fluido, e aumento da

pressão na saída, permitindo a descarga do fluido para a carcaça da bomba, onde um novo incremento de pressão ocorre. Pequenas irregularidades no gradiente de pressão podem ser notadas na porção superior e inferior da lâmina, próximo ao ponto de entrada e saída. Essas regiões apresentam variações bruscas de velocidade, fazendo com que o escoamento se torne altamente turbulento, afetando os gradientes de pressão de forma severa.

A Figura 10 (b) é o resultado da modelagem do campo de velocidade a 20 % da altura total da pá, ou seja, próximo à porção inicial da pá, com relação a sua altura. Observa-se a escala de cores de velocidade, entre zero e 24 m/s. Pode-se observar por essa imagem que a velocidade na região próxima à pá é aproximadamente zero, sendo representada pelas três áreas azuis na imagem. Este valor é coerente com a condição de não deslizamento na parede. A pá é representada por uma linha cinza fina na imagem, quase imperceptível, e está na parte mais alta da região azul. Outra característica importante do comportamento do escoamento que pode ser observada por essa imagem é a recirculação presente na região próxima da pá, representado pelas setas, que representam as linhas de corrente no instante analisado. Como bombas operam com gradiente de pressão adverso, o descolamento da camada limite é um fator a ser levado em conta na análise das ineficiências durante o escoamento do fluido sendo bombeado. Portanto, a análise de fluidodinâmica computacional permite a observação e mitigação desse fenômeno, conforme será demonstrado no efeito do aumento do número de pás do impelidor.



(a) (b)

Figura 10: Resultados da simulação numérica para (a) o campo de pressão ao longo do plano meridional e (b) o campo de velocidade a uma altura de 20% da altura total da pá.

Uma imagem representativa de todo escoamento pelo impelidor é apresentada na Figura 11. Pode-se observar por esta figura a estratégia da modelagem usando a simetria do problema. As linhas cinzas representam a fronteira para a solução do problema físico, com uma pá entre elas. As linhas dos contornos estão a meio caminho entre uma pá e a próxima. Com isso é possível identificar o escoamento por uma geometria característica e replicar o resultado em torno do impelidor.

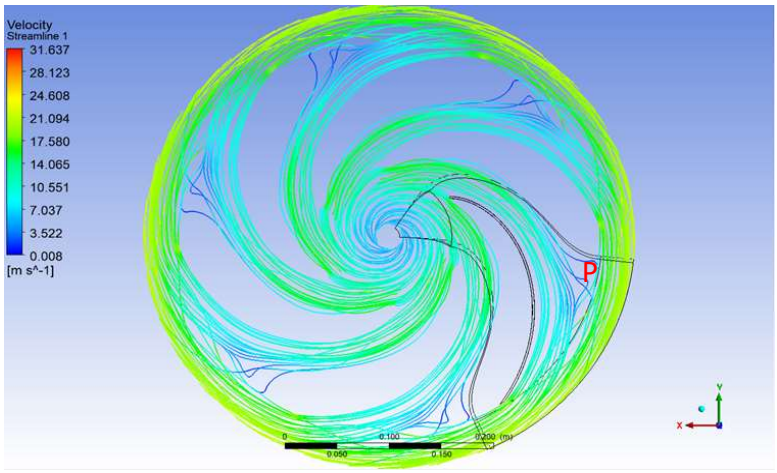


Figura 11: Linhas de corrente e campo de velocidade para o caso padrão (caso 1).

Pode-se observar pela Figura 11 que existem regiões (indicadas pela letra P) onde o escoamento não acompanha o formato das pás do impelidor, e este comportamento representa uma queda em termos da entrega de energia ao fluido pelas pás do impelidor.

Os dois fenômenos observados anteriormente, quais sejam, o descolamento da camada limite (Figura 10 (b)) e a não concordância do escoamento com o formato da pá do impelidor (Figura 11, letra P) não são explorados pela formulação dada pela equação de Euler, Eq.(15). De fato, esse é um dos motivos que fazem com que a energia prevista pela expressão de Euler seja o máximo teórico. Com base na derivação dessa expressão, disponível por exemplo em [21], é possível observar que toda informação do escoamento entre a entrada e saída das pás do impelidor é desprezado em detrimento de uma expressão simples para relacionar a geometria do problema com a energia fornecida ao fluido. Portanto, a análise da sexta coluna da Tabela 3 demonstra uma discrepância de aproximadamente 25% entre o *head* obtido com a Eq. (15) e o *head* obtido utilizando fluidodinâmica computacional. Além disso, qualquer resultado acima do *head* de Euler indica algum erro computacional, por isso ele pode ser usado na verificação da solução.

O número de pás é um fator importante no projeto de turbomáquinas. Muitas pás no impelidor aumentam as perdas de carga do escoamento ao passar pelo espaço entre elas. Por outro lado, poucas pás fazem com que fenômenos como o observado na Figura 11 ocorram. Dessa forma, foi realizada uma análise do número de pás do impelidor, onde testou-se de 7 a 13 pás. Os resultados não estão mostrados aqui por simplicidade, mas o *head* obtido com 13 pás foi o máximo, com valor de 103,9 metros, que é o caso 2 deste trabalho. Portanto este valor foi o usado na simulação apresentada a seguir, e os dados dessa simulação são os presentes no caso 2 da Tabela 2 .

Para este caso, uma análise com 151000 nós foi realizada, onde a análise da convergência de malha (Tabela 3) forneceu o número ótimo de nós na malha, e a análise do campo de escoamento pelo impelidor (Figura 11) demonstrou que um maior número de pás poderia ser necessário para reduzir o efeito da não concordância do escoamento com o formato das pás, bem como a mitigação da recirculação nas regiões de descolamento da camada limite (Figura 10 (b)). É importante ressaltar que o *head* obtido com 13 pás, de 103,9 metros fez com que a diferença percentual para o *head* teórico (Euler) fosse reduzido para 15,5 %, ante os 25% do caso com 6 pás.

O perfil de pressão ao longo do plano meridional da pá, para o caso com 13 pás, não apresentou diferença significativa com relação a 6 pás (Figura 10 (a)) e não será apresentado aqui para fins de simplicidade. Entretanto, com base na análise quantitativa do aumento de *head* entre esses dois casos, o resultado que merece destaque é a o campo de velocidades do escoamento, conforme apresentado na Figura 12, a 20 % de altura da pá, para fins de comparação com o resultado da Figura 10 (b), onde pode-se observar a redução da recirculação na região próxima as pás.

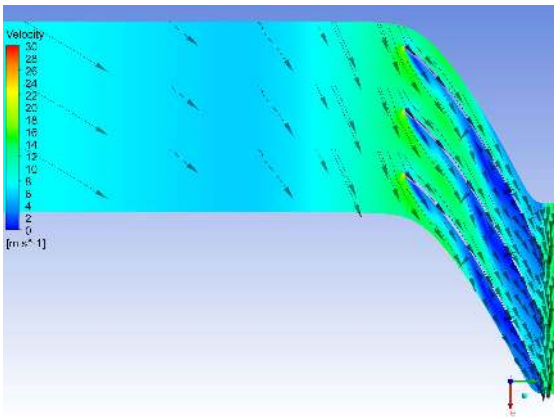


Figura 12: Perfil de velocidade a 20 % da altura da pá para o caso com 13 pás.

Além disso a comparação do escoamento em torno do impelidor demonstra que no caso do impelidor com 13 pás, as linhas de corrente apresentaram comportamento mais coerente com o formato das pás, conforme pode ser visto pela Figura 13. Quando comparada com a Figura 11 (ponto P), pode-se observar que estas perturbações no escoamento foram mitigadas.

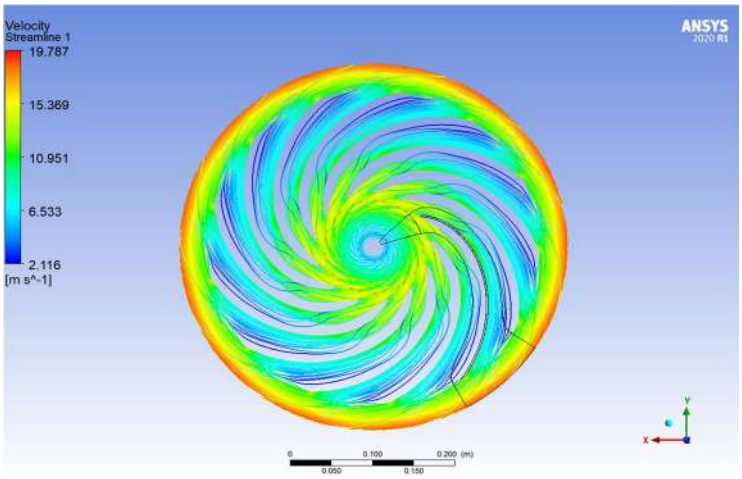


Figura 13: linhas de corrente e campo de velocidade para o impelidor com 13 pás (caso 2).

A simulação seguinte foi o caso 3 da Tabela 2, onde o número de pás foi mantido em 6 e os parâmetros geométricos da pá do impelidor foram alterados. Para este caso a malha utilizada resultou em 147000 nós. O *head* obtido por esta simulação foi de 94,9 metros, ou seja, 2 metros a mais do que o caso base (veja o caso 1 da Tabela 2 e a malha 0 da Tabela 3) porém menor do que os 103,9 metros obtidos para o caso 2. Portanto observa-se que a alteração do ângulo das pás resultou em menor impacto em termos do *head* do que o aumento do número de pás. É importante ressaltar que outras variações de angulação das pás foram testadas, e os resultados apresentados aqui foram os que forneceram o maior *head*.

A análise qualitativa das figuras, seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente, demonstra que a alteração do ângulo das pás também melhora os fenômenos relacionados à recirculação e à coerência do escoamento com relação ao formato das pás, como pode ser visto na Figura 14.

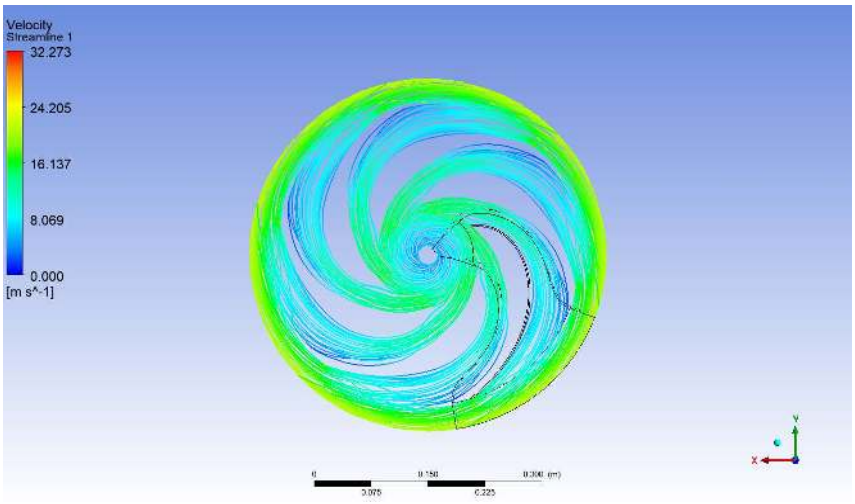


Figura 14: linhas de corrente e campo de velocidade para o impelidor com 6 pás (caso 3).

Finalmente as alterações para o número de pás e seus parâmetros geométricos foram analisados no caso 4, que será apresentado a seguir. De acordo com a geometria analisada neste caso, o número de nós na malha foi de 164000 e o *head* fornecido pelo impelidor foi de 103 metros, ou seja, ligeiramente inferior ao obtido no caso 2, com a geometria original das pás e 13 lâminas. Os resultados qualitativos se assemelharam aos observados nas figuras anteriores com relação à melhoria na recirculação e não concordância do escoamento com o formato das pás, e não serão apresentados aqui por simplicidade.

A Tabela 4 reúne os principais resultados e parâmetros para as análises realizadas neste trabalho.

Tabela 4: Resumo dos resultados obtidos para as simulações.

	Caso 1 (6 pás)	Caso 2 (13 pás)	Caso 3 (6 pás)	Caso 4 (13 pás)
Head (m)	92,1	103,9	94,9	103
Nós	510000	151000	147000	164000
% Euler	25,1	15,5	22,8	16,2

A partir dos resultados apresentados na Tabela 4, observa-se que a configuração com 13 pás e mantendo a geometria original do impelidor foi a que obteve maior *head* dentre as opções analisadas neste trabalho. Entretanto é importante observar que outros fatores influenciam no processo de seleção de impelidores. Portanto diversos fatores, como custo de fabricação, devem ser analisados.

5 Conclusão

O presente trabalho visou a simulação numérica do escoamento pelo impelidor de turbomáquinas usando a versão *student* do software Ansys®. Para a comparação dos resultados simulados, e equação de Euler das turbomáquinas foi utilizada. Como a expressão de Euler não leva em conta os efeitos do atrito, considera que o fluido descreve a mesma trajetória das pás, só considera a direção do vetor velocidade no início e fim do impelidor para o cálculo do *head* o valor obtido é o máximo teórico que o impelidor pode fornecer ao fluido.

O escoamento turbulento foi modelado pelo software Ansys®, onde uma limitação do número de nós de 512000 para a versão *student* restringe o tamanho da malha. Entretanto, a análise de convergência demonstrou que mesmo

uma malha com aproximadamente 100000 nós é suficiente para obter um resultado convergido, ou seja, não há mais variações consideráveis no valor da energia fornecida ao fluido (*head*) para uma malha mais refinada.

A geometria do impelidor foi desenvolvida pelo módulo Bladegen®, disponível no Ansys®. Uma geometria padrão com 6 pás foi utilizada, e foram realizadas otimizações geométricas delas, bem como no próprio número de pás, que variaram de 6 a 13.

O modelo de turbulência utilizado foi o $k - \varepsilon$, por ser um modelo amplamente testado e validado na literatura e nos programas de modelagem multifísica, como é o caso do Ansys®. O módulo Turbogrid® foi utilizado para a geração da malha do impelidor.

Os resultados demonstraram que a recirculação e a não concordância do escoamento com o formato da pá foram reduzidos quando comparado com o caso padrão para um impelidor com 13 pás. De fato, o aumento do número de pás de 6 para 13 resultou em um impacto muito maior em termos de aumento de *head* do que a variação da geometria do impelidor.

O caso 2, onde a geometria do impelidor foi mantida constante e o número de pás foi aumentado de 6 para 13 forneceu o *head* de 103,9 metros, o que representa um aumento significativo frente aos 92,1 metros do impelidor com 6 pás. Além disso, quando comparado com o *head* de Euler, a diferença percentual caiu de 25,1 % para 15,5 % para o caso com 6 e 13 pás respectivamente.

Evidentemente, entende-se que esses resultados precisam imperativamente de validação com dados experimentais. Entretanto foi demonstrada a importância da análise do escoamento usando técnicas de modelagem, onde a visualização de fenômenos que interferem no desempenho de máquinas de turbomáquinas é fundamental no processo de otimização e projeto desses dispositivos.

Referências

[1] H. Keck e M. Sick, "Thirty years of numerical flow simulation in hydraulic turbomachines," *Acta Mechanica*, vol. 201, no. 1–4, pp. 211–229, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s00707-008-0060-4

[2] H. M. P. Rosa e B. S. Emerick, "CFD Simulation of a Centrifugal Pump Impeller with Variations of Number of Blades," *The Journal of Engineering and Exact Sciences*, vol. 4, no. 2, pp. 0220–0224, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.18540/jcecvl4iss2pp0220-0224.

[3] H. M. P. Rosa e B. S. Emerick, "CFD simulation on centrifugal pump impeller with splitter blades," *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, vol. 24, no. 1, pp. 3–7, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1807-1929/agriambi.v24n1p3-7.

[4] L. Ji, W. Li, W. Shi, F. Tian, e R. Agarwal, "Effect of blade thickness on rotating stall of mixed-flow pump using entropy generation analysis," *Energy*, vol. 236, pp. 121381, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.121381.

[5] I. Chalghoum, H. Kanfoudi, S. Elaoud, M. Akrout, e R. Zgolli, "Numerical Modeling of the Flow Inside a Centrifugal Pump: Influence of Impeller–Volute Interaction on Velocity and Pressure Fields," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 41, no. 11, pp. 4463–4476, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s13369-016-2157-8.

[6] Y. Wu, X. Chen, H.-S. Dou, L. Zheng, Z. Zhu, B. Cui, e B. C. Khoo, "Numerical simulation and analysis of flow characteristics in the front chamber of a centrifugal pump," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 31, pp. 5131–5140, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s12206-017-1007-2.

[7] R. Dunaiski, "Simulação numérica do escoamento monofásico em uma bomba centrífuga radial," Dissertação de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015. [Online]. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1795/1/CT_PPGEM_M_Dunaiski%2C%20Rafael_2015.pdf

[8] *Turbulência: Anais da I Escola de Primavera em Transição e Turbulência*. Rio de Janeiro: ABCM, 1998. Acessado: 13 de abril de 2022. [Online]. Disponível em: https://abcm.org.br/app/webroot/anais/eptt/turbulencia.pdf

[9] A. da S. Neto, "Fundamentos da turbulência nos fluidos". [Online]. Disponível em: https://abcm.org.br/app/webroot/anais/eptt/2002/Cap1-ASilveiraNeto.pdf

[10] A. P. S. Freire, "Introdução à Turbulência". Acessado: 8 de abril de 2022. [Online]. Disponível em: http://www.turbulencia.coppe.ufrj.br/notas_aulas/CursoTurbulencia_APSF.pdf

[11] C. D. Argyropoulos e N. C. Markatos, "Recent advances on the numerical modelling of turbulent flows," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 2, pp. 693–732, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.001.

[12] *Introdução ao CFD - ANSYS/FLUENT / projeto de um separador ciclônico - escoamentos multifásicos*, (27 de outubro de 2021). Acessado: 8 de abril de 2022. [Online Video]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6pWhUWXGX2Y

[13] P. A. Durbin e B. A. P. Reif, *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows: Durbin/Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2010. Disponível em: https://doi.org/10.1002/9780470972076.

[14] S. B. Pope, *Turbulent flows*, 12ª impressão. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015.

[15] F. M. White, *Viscous fluid flow*, 3ª edição. Boston, Mass.: McGraw-Hill, 2006.

[16] *Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência*, vol. 2. Rio de Janeiro: ABCM, 2006. Acessado: 13 de abril de 2022. [Online]. Disponível em: https://www.abcm.org.br/anais/eptt/2006/artigos para o site/Turbulencia_V5_T2.pdf

[17] H. K. Versteeg e W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, 2ª edição, Harlow: Pearson/Prentice Hall, 2007.

[18] Ansys Inc., "Ansys Fluent Theory Guide". julho de 2021. [Online]. Disponível em: www.ansys.com

[19] H. Schlichting e K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5.

[20] P. S. Bernard e J. M. Wallace, *Turbulent flow: analysis, measurement, and prediction*. Hoboken, NJ: Wiley, 2002.

[21] J. W. Mitchell, R. W. Fox, e A. T. McDonald, *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*, 10ª edição, EMEA edition. Hoboken: Wiley, 2020.